

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПОЗИЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рзаева Сабина Мисировна

студент Набережночелнинского института «Казанского (Приволжского) федерального университета» РФ, г. Набережные Челны

Феоктистова Лида Александровна

научный руководитель, канд. техн. наук, доц. Набережночелнинского института «Казанского (Приволжского) федерального университета» РФ, г. Набережные Челны

Аналитическая геометрия - раздел геометрии, который исследует простейшие геометрические объекты средствами элементарной алгебры на основе метода координат. Основная задача аналитической геометрии заключается в изучении геометрических фигур с помощью соотношений между координатами точек, из которых эти фигуры образованы.

Начертательная геометрия – раздел геометрии, в котором пространственные фигуры изучаются при помощи построения их изображений на плоскости, в частности построения проекционных изображений, а также методы решения и исследования пространственных задач на плоскости.

Цель начертательной геометрии – развитие пространственного представления и воображения, конструктивно-геометрического мышления, способности к анализу и синтезу пространственных форм и отношений на основе графических моделей пространства, практически реализуемых в виде чертежей конкретных пространственных объектов и зависимостей.

Задача изучения начертательной геометрии сводится к изучению способов получения определенных графических моделей пространства, основанных на ортогональном проецировании и умении решать на этих моделях задачи, связанные пространственными формами и отношениями.

Рассмотрим на примерах метрических задач связь аналитической и начертательной геометрии.

Метрическими называются задачи, решение которых связано с нахождением характеристик геометрических фигур, определяемых (измеряемых) линейными и угловыми величинами.

Все метрические задачи, в итоге, сводятся к решению двух задач, которые называются основными метрическими задачами:

1. Первая основная метрическая задача - построение угла между прямой и плоскостью.
2. Вторая основная метрическая задача – определение расстояния между двумя точками.

В данной статье рассмотрим построение прямого угла с аналитической точки зрения.

1. Перпендикулярность прямых в плоскости.

Две прямые на плоскости перпендикулярны, если при пересечении образуют 4 прямых угла.

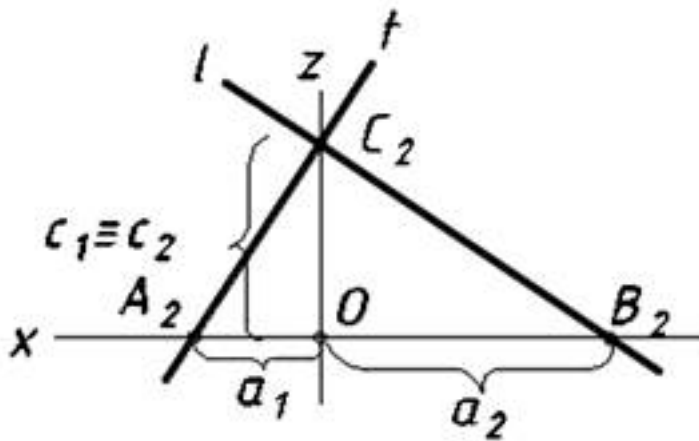


Рисунок 1. Перпендикулярность двух прямых

В плоскости проекций Π_2 заданы две перпендикулярные прямые l и t (рис.1).

Из подобия треугольников C_2OA_2 и B_2OC_2 следует:

$$a_1/c_1 = a_2/c_2 \text{ или}$$

$$a_1/c_1 - a_2/c_2 = 0. \quad (1)$$

Формула (1) является аналитическим выражением перпендикулярности двух прямых в плоскости.

2. Перпендикулярность прямой и плоскости.

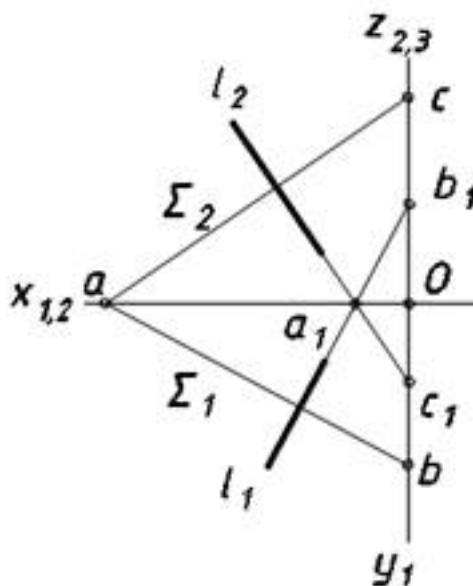


Рисунок 2. Перпендикулярность прямой и плоскости

Из курса стереометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она

перпендикулярна хотя бы к двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

Дана прямая l перпендикулярная плоскости S , заданной следами (рис.2).

Плоскость S задана уравнением:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

Прямая проходит через две точки с координатами $(a_1, 0, 0)$ и $(0, -b_1, -c_1)$. В соответствии с

$$\frac{x - X_A}{X_B - X_A} = \frac{y - Y_A}{Y_B - Y_A} = \frac{z - Z_A}{Z_B - Z_A}$$

получим уравнение прямой l :

$$x/a_1 = (y + b_1)/b_1 = (z + c_1)/c_1 \quad (3)$$

или:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)x - b_1; \\ z = \left(\frac{c_1}{a_1}\right)x - c_1. \end{cases} \quad (4)$$

Из подобия треугольников Oac и Oa_1c_1 следует:

$$a/c = c_1/a_1 \text{ или } aa_1 = cc_1.$$

Из подобия треугольников Oab и Oa_1b_1 следует:

$$a/b = b_1/a_1 \text{ или } aa_1 = bb_1.$$

Окончательно:

$$aa_1 = bb_1 = cc_1. \quad (5)$$

Полученное выражение является условием перпендикулярности прямой и плоскости.

3. Перпендикулярность двух прямых в пространстве.

Прямые перпендикулярны, если через одну из прямых можно провести плоскость, перпендикулярную к другой прямой.

Допустим: прямая l проходит через две точки $1(X_1; Y_1; Z_1)$ и $2(X_2; Y_2; Z_2)$;

прямая t через две точки $3(X_3; Y_3; Z_3)$ и $4(X_4; Y_4; Z_4)$.

Представим прямую l аналитически:

$$\frac{x - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{z - Z_1}{Z_2 - Z_1}.$$

Таким образом, сравнивая

$$\frac{x - X_A}{X_B - X_A} = \frac{y - Y_A}{Y_B - Y_A} = \frac{z - Z_A}{Z_B - Z_A}$$

и $x/a_1 = (y + b_1)/b_1 = (z + c_1)/c_1$ получим для прямой l :

$$a = X_2 - X_1;$$

$$b = Y_2 - Y_1;$$

$$c = Z_2 - Z_1.$$

Заклучим прямую t в плоскость:

$$A(X_4 - X_3) + B(Y_4 - Y_3) + C(Z_4 - Z_3) = 0. \quad (6)$$

Если прямые l и t перпендикулярны, то выполняется условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$a_1/A = b_1/B = c_1/C \quad (7)$$

$$\text{или } (X_2 - X_1)/A = (Y_2 - Y_1)/B = (Z_2 - Z_1)/C$$

Отсюда $A = B(X_2 - X_1)/(Y_2 - Y_1)$, и $C = B(Z_2 - Z_1)/(Y_2 - Y_1)$.

Подставив эти выражения в (7) и умножив каждый член на $(Y_2 - Y_1)/B$, получим аналитическое условие перпендикулярности прямых.

$$(X_2 - X_1)(X_4 - X_3) + (Y_2 - Y_1)(Y_4 - Y_3) + (Z_2 - Z_1)(Z_4 - Z_3) = 0 \quad (8).$$

4. Перпендикулярность двух плоскостей.

Плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую перпендикулярную другой плоскости.

Заданы две плоскости:

$$S: A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0;$$

$$D: A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0.$$

Допустим, что прямая l проходит через две точки $1(X_1; Y_1; Z_1)$ и $2(X_2; Y_2; Z_2)$ плоскости S .
Условие принадлежности прямой l плоскости S :

$$A_1(X_2 - X_1) + B_1(Y_2 - Y_1) + C_1(Z_2 - Z_1) = 0. \quad (9)$$

Отсюда перпендикулярность прямой l и плоскости D , принимая в расчет (7) выразиться:

$$(X_2 - X_1)/A_2 + (Y_2 - Y_1)/B_2 + (Z_2 - Z_1)/C_2$$

$$\text{или } (X_2 - X_1) = A_2(Y_2 - Y_1)/B_2;$$

$$(Z_2 - Z_1) = C_2(Y_2 - Y_1)/B_2.$$

Подставляя полученные выражения в (9) и деля все члены на $(Y_2 - Y_1)/B_2$,

окончательно получим условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = 0. \quad (10)$$

В отличие от аналитических определения метрических характеристик, геометрические решения довольно-таки приближительны, хотя с математической точки зрения, являются геометрически точными.

Список литературы:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. для вузов. - М.: Наука, 1988. - 224 с.
2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия: учебник для втузов/ А.В. Бубенников. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 1985. - 288 с.
3. Феоктистова Л.А., Талипова И.П., Рзаева Т.В. К вопросу о связи начертательной геометрии с аналитической геометрией. Естественные и технические науки. - Москва: Изд-во Спутник +, 2015. - №11 - С. 303-307