

**ПАРАБОЛА ТИПТЕГІ ДИФфуЗИЯ ТЕҢДЕУІН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЖУЫҚТАУ ӘДІСІ
АРҚЫЛЫ МОДЕЛЬДЕУ (MATLAB)****Ердәулет Аяжан Арманқызы**

студенті Қазақ Ұлттық Қыздар педагогикалық университеті, Қазұлтқызпу, Алматы

Пирниязова Периуза

научный руководитель, Ғылыми жетекші: PhD докторы Қазақ Ұлттық Қыздар педагогикалық университеті, Қазұлтқызпу, Алматы

Түйіндеме. Бұл мақалада диффузия теңдеуінің параболалық типіндегі дифференциалдық теңдеудің шешімі қарастырылады. Диффузия теңдеуінің шешімі дифференциалдық жуықтау әдісімен қарастырылады, оның негізінде диффузия теңдеуінің аппроксимациясын аламыз. Функцияны Тейлор қатарына бөлу арқылы біз уақыт кеңістіктік тордың орталық айырымдылық сұлбасын аламыз. Диффузия теңдеуінің шешімін алғаннан кейін біз Matlab ортасында функцияның графигін құрамыз.

Кілт сөздер: Дифференциал жуықтау әдісі, диффузия теңдеуі, Тейлор қатары.

Кіріспе. Диффузия теңдеуі дербес дифференциалдық теңдеудің белгілі бір түрі болып табылады. Ол тұрақты емес және стационарлық. Түсіндіру мағынасында диффузиялық теңдеуді шешу кезінде біз заттың (немесе басқа заттардың) концентрациясының кеңістіктік координаттар мен уақытқа тәуелділігін табу туралы айтып отырмыз және коэффициент беріледі. Қозғалыстағы сұйықтар мен газдардағы диффузия немесе жылу өткізгіштік мәселелерінде диффузия теңдеуінің орнына макроскопиялық қозғалысты елемеу мүмкін болмайтын жағдайға диффузия теңдеуін кеңейтетін тасымалдау теңдеуі қолданылады. Осы теңдеулердің шешімін өз еңбектерінде қарастырған Қазақстандық ғалымдар - М.Бөріханов, М.Муратбекова, және жетекшілік етіп отырған П.М. Пирниязова өз еңбектерінде рекуррент-оператор әдісі мен қарастырған [1,2,3].

Мәселенің қойылуы. Берілген дербес туындылы диффузия дифференциал теңдеуін бірінші дифференциал жуықтау әдісі мен аппроксимациясын алуын қарастырайық [1]

$$\frac{du}{dt} = D \frac{d^2 u}{dx^2} - v \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Бұл жерде D - диффузия коэффициенті, $\frac{m^2}{c}$, v - адсорбцияланатын ағынның көлемдік шығыны, $\frac{m^3}{c}$

Шешу әдістері. Дифференциалды жуықтау әдісі - белгілі шамаға жақын функцияның мәні. Әдіс функцияның графигін жуықтау үшін белгілі функция мәніндегі тангенсті пайдаланады. Дифференциалды жуықтау деп аталатын бұл әдіс уақыт бойынша жүйенің x шығысын

дифференциалдауды талап етеді. Айырмашылық немесе дифференциалды жуықтау әдістерінің бірнеше елеулі шектеулері бар болса да, олар қажет болған жағдайда квазисызықтыру процедурасы немесе градиент типті процедура үшін бастапқы жуықтауды есептеу үшін пайдаланылуы мүмкін. Алгоритм итеративті емес, шешім бірінші итерацияда алынады. Алдымен айырмашылықты жуықтау деп аталатын алгоритмнің дискретті нұсқасын қарастырайық, содан кейін дифференциалды жуықтаудың үздіксіз жағдайын қарастырамыз. Алгоритм өте қарапайым және оны көптеген авторлар бірнеше рет қарастырған, бірақ оның қазіргі түсіндірмесі бойынша алгоритмнің негізгі жасаушысы Ричард Беллман екені жалпы мойындалған.

$$\frac{du}{dt} = D \frac{d^2 u}{dx^2} - v \frac{du}{dx} \quad (1')$$

Дифференциал әдісі - теңдеулерді шешуде қолданылатын дискреттеу үздіксіз аймақты оқшауланған нүктелер жиынтығымен ауыстыру болып табылады. Туындыларды дифференциал әдісімен ауыстыра отырып диффузия теңдеуінің шешімін бастапқы теңдеуді шешуге дейін жақындатамыз. Туындыларды дифференциал әдісімен жуықтау идеясын жақсы түсіну үшін, $u(t, x)$ функциясының (t, x) нүктесіндегі туындысының анықтамасын айтамыз

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Егер $u(t, x)$ функциясы үздіксіз, ал Δx - жеткілікті аз болса, онда [

$u(t, x + \Delta x) - u(t, x)$ айырымдылық мәні $\frac{du}{dx}$ туындысының мәніне жақын болады.

Айырымдылықтың дұрыстығын $u(t, x + \Delta x)$ функциясын Тейлор қатарына Δx нүктесі бойынша, туындыларға жуықтау арқылы тексеруге болады.

$$u(t, x + \Delta x) = u(t, x) + (t, x + \Delta x - x) \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots \quad (3)$$

Мұнда «Оң жақ айырымдылық» формуласы берілген:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots \quad (4)$$

$\frac{du}{dx}$ - туынды жуықтылар арқылы шексіз шекті айырымдылықты құруға болады.

$$u(t, x - \Delta x) = u(t, x) + (t, x - \Delta x - x) \frac{du}{dx} + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots \quad (5)$$

Бұл формулада «Сол жақ айырымдық» формуласы берілген.

$$\frac{du}{dx} = \frac{-u(t, x - \Delta x) + u(t, x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots \quad (6)$$

Енді $u(t, x + \Delta x)$ «Оң жақ айырымдылық» формуласы мен $u(t, x - \Delta x)$ «Сол жақ айырымдылық» формуласын Тейлор қатары бойынша $\Delta x(t, x)$ нүктесінде жайылмасын (4) және (6) қосып, орталық айырымдылық формуласын аламыз

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} + \dots + O(h^3) \quad (7)$$

Бұл жерде $\frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x}$ — айырымдылық сұлбасы, $O(h^3)$ — «туындыны жуықтау қателігі».

$\frac{d^2 u}{dx^2}$ және $\frac{du}{dt}$ нүктелеріндегі туындыларында Тейлор қатарына жаямыз.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x))}{\Delta x^2} + \dots + O(h^4) \quad (8)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t - \Delta t, x)}{\Delta t} + \dots + O(h^3) \quad (9)$$

Осылайша Тейлор қатарына жайылған диффузия теңдеуін жинақтаймыз.

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t - \Delta t, x)}{\Delta t} = D \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x))}{\Delta x^2} - v \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (10)$$

Matlab қосымшасында диффузия теңдеуінің орындалу процедурасы

```
clc
```

```
clear
```

```
close all
```

```
nx = 3; nt = 3; s = 0; v = 1; t0 = 0;
```

```
tf = 0.2;
```

```

dx = (v-s)/(nx-1);

dt = (tf - t0)/(nt-1);

x = s:dx:v;

t = t0:dt:tf;

a = -dt/dx^2

b = 1+ (2dt/dx^2)

%% Analytical Solution


UA = zeros (nx, nt);

for j = 1: nt
    for i = 1:nx
        UA(i,j) = sin(pi*x(i))*exp(-pi^2)*t(j);
    end
end

figure()

contourf (UA,200,'linecolor','non')

Xlabel('x')

Ylabel('t')

title('Analytical solution')

colormap(jet(256))

colorbar

caxis([0,1])

%%Numerical Solution


UN = zeros (nx, nt);

%%Initial condition

UN (1,:) = sin(pi*x(i));

%%for j = 1: nt - 1

%%for i = 1:nx - 1

```

```

%%UN(i,j) = a*UN (i+1,j-1)+ b*UN(i+1,j) + a*UN(i+1,j+1)

%%end

%%end

%%figure()

%%contourf (UN,200,'linecolor','non')

%%xlabel('x')

%%ylabel('t')

%%title('Numerical solution')

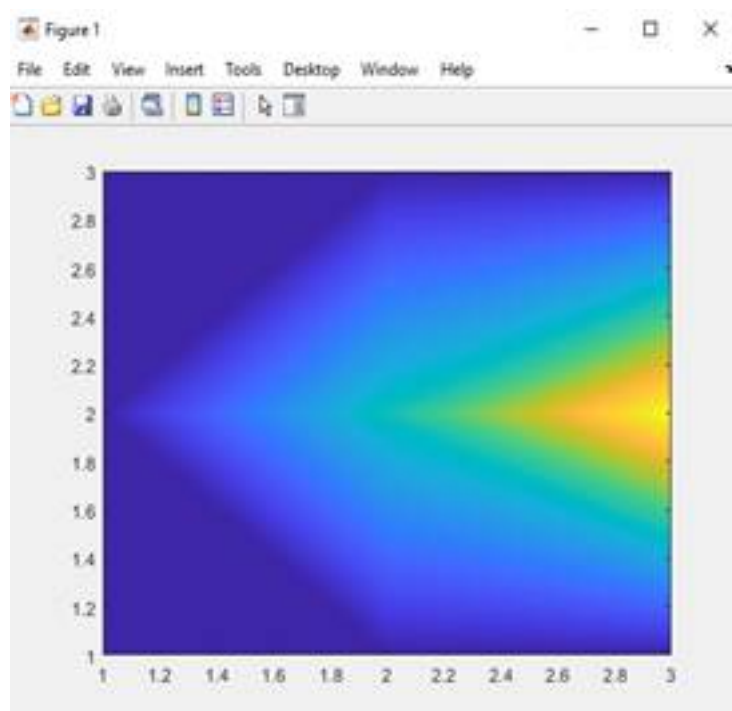
colormap(jet(256))

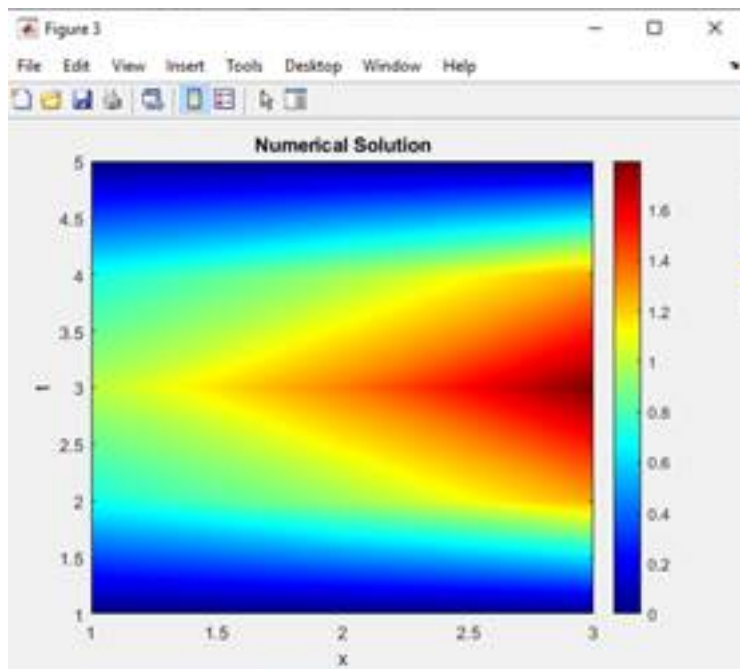
colorbar

caxis([0,1])

```

Зерттеу нәтижесі: $\partial_t u = 0.834$, $\partial_x u = 0.532$ уақытында $t=1$, $x=3$ алған нәтижеміз. Алынған нәтиже басқа авторлар нәтижесімен салыстырғанда Matlab пакетінде есептеулер жүргізілуі өте тиімді және тез.



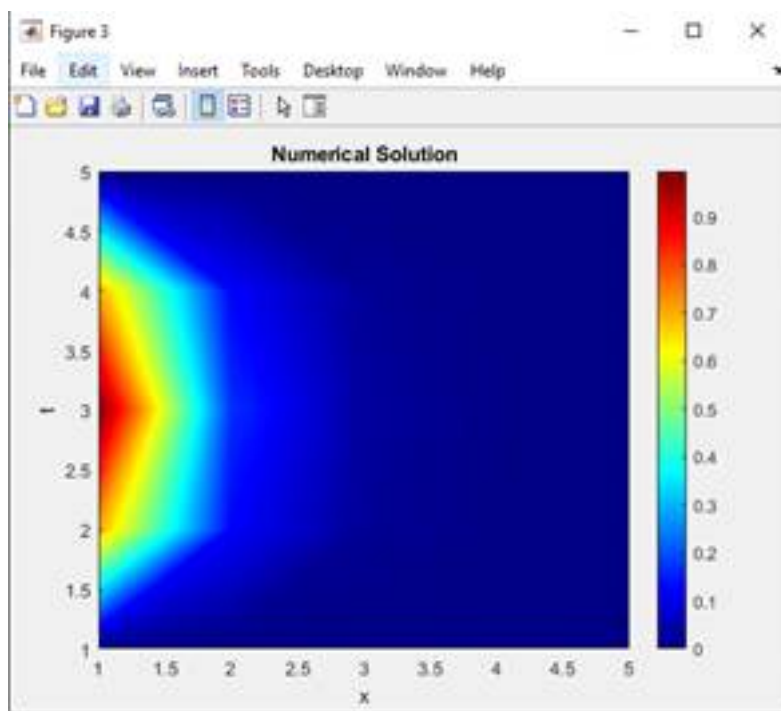


Сурет 1. Бірөлшемді диффузия теңдеуінің

таралуы

Сурет 2. Бірөлшемді диффузия

жүруі



Сурет 3. Бірөлшемді диффузия теңдеуінің

таралуы

Берілген суреттерде диффузия теңдеуінің MATLAB пакетіне салғанда, 1, 3, 5 секунд ішінде бөлменің көлеміне сәйкес будың біркелкі таралуы.

Талдау. $\partial = 0.834$ $\partial = 0.532$ $u(x, t) = s * UN(i - 1, j) + (1 - 2 * s) * UN(i, j) + s * UN(i + 1, j)$
 функциясындағы $t=1, t=3, t=5$ с. уақыт ішінде [1,2] алған нәтижеміз. Алынған нәтиже Андрей
 Анатольевичтің «Численные методы решения уравнения диффузии в системе MATLAB»
 нәтижесімен салыстырғанда Matlab пакетінде есептеулер жүргізілуі өте тиімді және тез.

№	t, с	x, м	u(x,t)
1	1	2.4	0,653195
2	3	4.2	1,119764
3	5	4.7	1,667733

Қорытынды. Жоғарыда қарастырылған диффузия дифференциал теңдеуін Бірінші дифференциал жуықтау әдісімен шешімі қарастырылды, қойылған мәселенің шешімі Matlab қосымша қолданбалы пакетінде алынды. Атап айтқанда, осы пакеттің басқа пакеттерден ерекшелігі MATLAB программалау тілі интерпретаторлар класына жатады. Бұл жүйенің кез келген пәрмені оның аты (идентификаторы) бойынша танылады (түсіндіріледі) және кез келген бағдарлама кодының бөліктерін оңай тексеруді қамтамасыз ететін пәрмен жолында дереу орындалатынын білдіреді. Сонымен бірге MATLAB программалау тілінің интерпретациялық сипаты осы жүйенің құралдарын сипаттаудың бірінші жолдарынан бастап оның программалау тілі іс жүзінде сипатталғанын білдіреді. Жүйенің маңызды артықшылықтары оның ашықтығы мен кеңеюі болып табылады.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Пирниязова П. М. Математическое моделирование экологически неблагоприятных очагов загрязнения: Монография.- Алматы 2020.101с
2. Pirniyazova P. M. Modelling of a three-dimensional problem of distribution of Harmful Impurity in the River a Recurrently-operational method /Евразийский Союз Ученых (ECU) №6 (75) 2020.
3. Pirniyazova P. M. Analytical solution of Diffusion Problems in the simulation of impurity diffusion and obtaining an exact solution /Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. № 1-2 2018 January-February.Vienna 2018.
4. Математическое моделирование химико-технологических процессов: учебное пособие / Н.В. Ушева, О.Е. Мойзес, О.Е. Митянина, Е.А. Кузьменко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014
5. Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р. Основные подходы к численно- М78 решению одномерных уравнений газовой динамики : учеб. пособие. – Томск : STT, 2016. – 136 с.
6. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.: ил.
7. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. — 3-е издание/ Пер. с англ. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. 720 с.
8. Е.А. Рындин, И.В. Куликова, И.Е. Лысенко Основы численных методов: теория и практика – Таранрог 2015
9. А.Г. Коробейников. Разработка и анализ математических моделей с использованием MATLAB и MAPLE. Учебное пособие с.
10. МЫНА ЖЕРГЕ СОЛ МАҚАЛАНЫҢ ТАҚЫРЫБЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ АВТОРЛЕРІ КІРУ КЕРЕК. Студенческий форум: научный журнал. № 13 (149). Часть 3. М., Изд. «МЦНО», 2021. – 68с.

