

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЯ ЛИПШИЦА В ОСОБЫХ ТОЧКАХ СИГНАЛА

Мележников Евгений Игоревич

магистрант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, РФ, г. Москва

Аннотация. В статье представлен метод для нахождения и классификации особых (сингулярных) точек сигнала – точек, где сигнал теряет свою гладкость какого-либо порядка.

Ключевые слова: показатель Липшица, исследование сигналов, сингулярные точки, вейвлет-преобразование.

При изучении различных сигналов особое внимание обращают на точки, в которых сигнал теряет свою гладкость. В этих точках, как правило, содержится полезная информация об этом сигнале. К примеру, в двумерных сигналах (изображениях), особые точки показывают наличие границ между объектами.

Помимо поиска таких точек, важно знать, на сколько сильно сигнал в этой точке потерял свою гладкость. Показатели Липшица в математике чаще всего связываются с понятием гладкости и регулярности функции, а показатель Липшица в точке будет говорить о локальной регулярности сигнала в этой точке.

Обычно для оценки показателя Липшица всего сигнала или на каком-то его участке можно использовать преобразование Фурье, но оно совсем не подходит для оценки показателя в точке. С этой проблемой поможет справиться вейвлет-преобразование, так как оно дает возможность изучить сигнал одновременно и во временной и в частотной области.

«Вейвлет» - функция, чей интеграл по всей числовой прямой равен нулю, так как интеграл до нуля и после нуля равны по модулю и противоположны по знаку. Вейвлет-преобразованием функции $f(x)$ будем называть свертку этой функции с некоторой вейвлет-функцией $\psi(x)$, которая может быть расширена с каким-либо масштабом s . Формула вейвлет-преобразования выглядит следующим образом:

$$Wf(s, x) = f * \psi_s(x), \text{ где } \psi_s(x) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x}{s}\right) \quad [1, \text{ с.618}]$$

Заметим, что функции $f(x)$ будем брать из Гильбертова пространства функций $L^2(R)$.

Функция $f(x)$ называется Липшицевой с показателем α ($n \leq \alpha \leq n+1$, $n \in \mathbb{N}$) в точке x_0 , если существует константы A и $h_0 > 0$, полином степени n $P_n(x)$, и для любого $h < h_0$ выполняется:

$$|f(x_0 + h) - P_n(h)| \leq A|h|^\alpha \quad [1, \text{с.619}]$$

Липшицевость функции – ее более обобщенная мера дифференцируемости.

Введем понятие максимума модуля вейвлет-преобразования, как пар значений (s, x) , таких, что для некоторого s вейвлет-преобразование имеет локальный максимум по переменной x . Также в пространстве точек (s, x) любую связную прямую из точек максимума модуля будем называть линией максимума.

Теоремы из [1, с.621-623] гласят, что если найдется линия максимума, содержащая точку

$(s, x) = (1, x_0)$, то точка x_0 – особая, и для всех точек максимума модуля, лежащих на линии

выполнено: $|Wf(s, x)| \leq As^{\alpha+0.5}$ для некоторого положительного A и любого масштаба s , если для него есть точка на линии максимумов.

Прологарифмировав полученное неравенство узнаем, что наилучшая оценка α – угол наклона прямой, аппроксимирующей зависимость логарифма от вейвлет преобразования от масштаба s в точках линии максимума. Для подсчета угла наклона прямой воспользуемся методом наименьших квадратов.

Итак, теперь нам известен алгоритм нахождения показателя Липшица в особых точках сигнала. Но обнаружим мы сингулярность или нет, зависит от используемого вейвлета, а вернее от количества его нулевых моментов. Количество нулевых моментов равно n – это свойство вейвлет-функции, которое означает равенство нулю интеграла по всей числовой

прямой от произведения вейвлета на x^k , где $k < n$. Известно, что вейвлет с 1 нулевым моментом может обнаружить сингулярность только 1 порядка, с 2 н.м. – сингулярности 1 и 2 порядка и т.д.

Приведем пример описанного ранее способа. Возьмем функцию $f(x)$ с двумя сингулярностями разного порядка (1 и 2) в двух разных точках, применим к ним вейвлет-преобразования с вейвлетами (gaus1, gaus2) и посмотрим на линии максимумов в этих точках, а также найдем значение показателя Липшица в этих точках. Видим, что вейвлет gaus1 обнаружил только сингулярность 1 порядка в точке 9, а gaus2 две сингулярности в точках 9 и 14. Подсчитав показатель Липшица в этих точках при помощи МНК, получим значения 0.98 и 1.98 соответственно. Пример реализован на языке Python при помощи библиотеки PyWavelets [2]

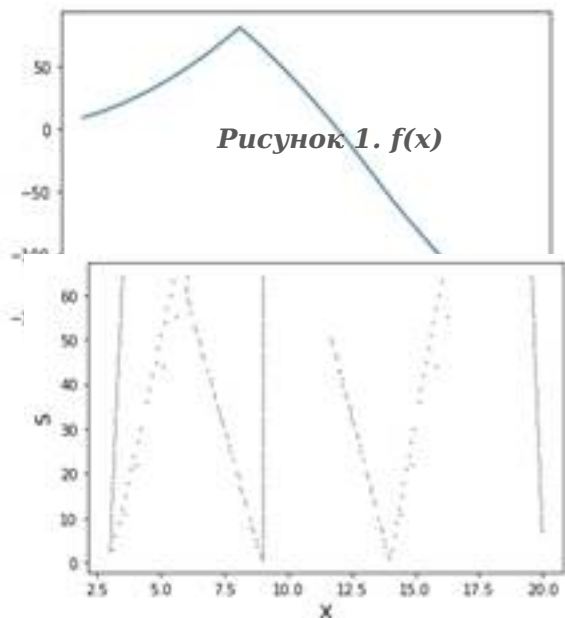


Рисунок 1. $f(x)$

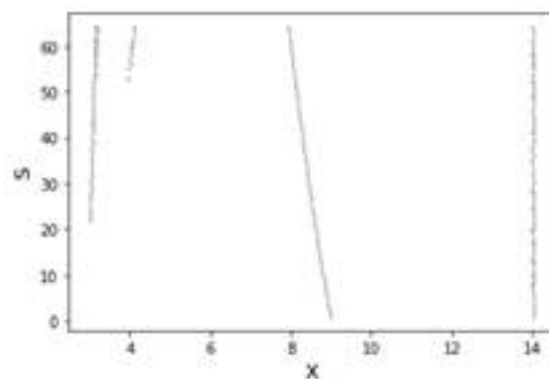


Рисунок 2. Максимумы, $gaus1$

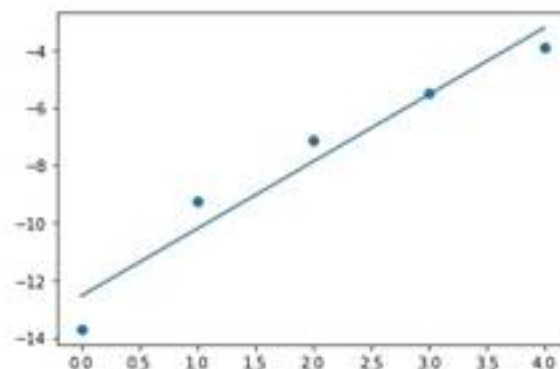


Рисунок 3. Максимумы, $gaus2$

Рисунок 4. МНК

Закключение. Подведем итог работы. Продемонстрирован способ при помощи максимумов модулей вейвлет-преобразования функции найти ее особые точки, а также посчитать значение локальной регулярности в этих точках. В подтверждение показан пример функции с двумя сингулярностями разного порядка, которые обнаружились при помощи описанного способа, а также посчитано значение показателей Липшица в найденных точках.

Список литературы:

1. Mallat, Stéphane & Hwang, W.L.. (1992). Hwang, W.L.: Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Transaction on Information Theory 38
2. Lee G, Gommers R, Wasilewski F, Wohlfahrt K, O'Leary A, Nahrstaedt H, and Contributors. PyWavelets - Wavelet Transforms in Python. [Электронный ресурс]// URL: <https://pywavelets.readthedocs.io/en/latest/>