

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ
ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ НА СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ****Ширяева Вероника Юрьевна**

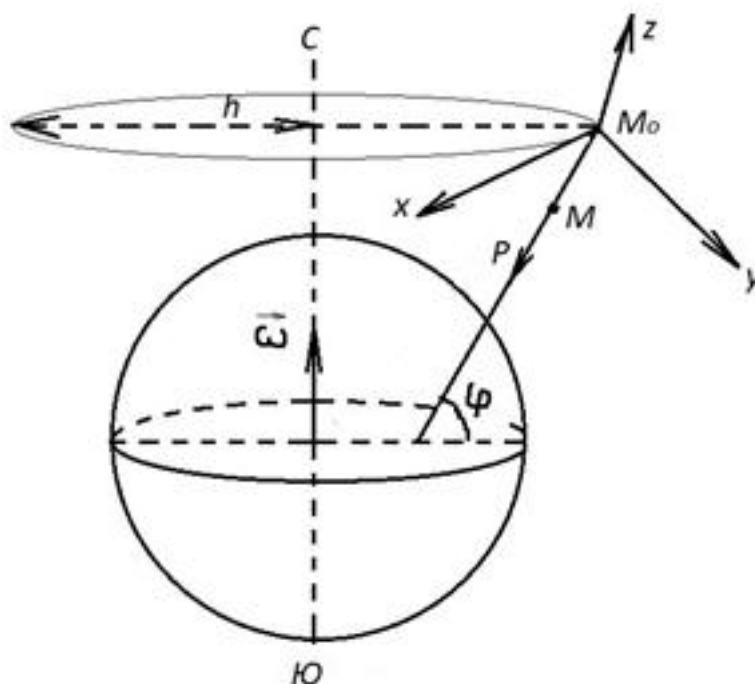
студент, НТИ (филиал) УрФУ, РФ, г. Нижний Тагил

Дёмина Елена Леонидовна

научный руководитель, доц., НТИ (филиал) УрФУ, РФ, г. Нижний Тагил

Исследуем свободное падение материальной точки вблизи земной поверхности. Свяжем систему координат с положением тела, где ось z направлена по вертикали вверх, ось x – по касательной к окружности радиуса h (перпендикулярно к плоскости рисунка на нас), а ось y – в плоскости меридиана (в плоскости рисунка). Направление линии действия силы тяжести $\mathbf{P}$ называется вертикальным направлением в данной точке земной поверхности.

Угол φ , образуемый вертикальным направлением с экваториальной плоскостью, называется географической широтой в данной точке земной поверхности.



Будем рассматривать свободное падение тела вблизи поверхности Земли, поэтому считаем, что сила тяжести g и широта φ постоянны.

Система уравнений, спроецированных на оси координат, при начальных условиях

$$\begin{cases} t = 0, \\ x = y = 0, \\ z = h, \\ \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0, \end{cases} \text{ имеет вид [3]:}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega(\dot{z}a + \dot{y}b), \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ \ddot{z} = -g - 2\omega\dot{x}\cos\varphi, \end{cases}$$

где $a = \cos\varphi, \quad b = \sin\varphi.$

В [1] рассматривается решение данной системы с помощью степенных рядов.

В данной работе делается попытка решения этой задачи методом операционного исчисления [4; 5; 2].

Перейдем к изображениям:

$$x(t) \xleftarrow{\bullet} X(p), \quad \dot{x}(t) \xleftarrow{\bullet} pX(p), \quad \ddot{x}(t) \xleftarrow{\bullet} p^2X(p);$$

$$y(t) \xleftarrow{\bullet} Y(p), \quad \dot{y}(t) \xleftarrow{\bullet} pY(p), \quad \ddot{y}(t) \xleftarrow{\bullet} p^2Y(p);$$

$$z(t) \xleftarrow{\bullet} Z(p), \quad \dot{z}(t) \xleftarrow{\bullet} pZ(p), \quad \ddot{z}(t) \xleftarrow{\bullet} p^2Z(p);$$

$$g \xleftarrow{\bullet} \frac{g}{p}.$$

Применим преобразование Лапласа к каждому из уравнений системы:

$$\begin{cases} p^2X(p) = 2\omega(paZ(p) + pbY(p)), \\ p^2Y(p) = -2\omega pbX(p), \\ p^2Z(p) = -\frac{g}{p} - 2\omega apX(p). \end{cases}$$

Для нахождения изображений неизвестных функций $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$ решим систему следующих операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p) - 2\omega bY(p) - 2\omega Z(p) = 0, \\ 2\omega bX(p) + pY(p) = 0, \\ 2\omega apX(p) + p^2Z(p) = -\frac{g}{p}. \end{cases}$$

По правилу Крамера имеем:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -2\omega b & -2\omega \\ 2\omega b & p & 0 \\ 2\omega ap & 0 & p^2 \end{vmatrix} = p^2(p^2 + 4\omega^2);$$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} 0 & -2\omega b & -2\omega a \\ 0 & p & 0 \\ -\frac{g}{p} & 0 & p^2 \end{vmatrix} = -2g\omega a;$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p & 0 & -2\omega a \\ 2\omega b & 0 & 0 \\ 2\omega ap & -\frac{g}{p} & p^2 \end{vmatrix} = \frac{g}{p} 4\omega^2 ab;$$

$$\Delta_3(p) = \begin{vmatrix} p & -2\omega b & 0 \\ 2\omega b & p & 0 \\ 2\omega ap & 0 & -\frac{g}{p} \end{vmatrix} = -gp - 4\omega^2 b^2 \frac{g}{p}.$$

Следовательно, изображения имеют вид:

$$\begin{cases} X(p) = -\frac{ag}{2\omega} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2\omega} \frac{2\omega}{p^2 + 4\omega^2} \right], \\ Y(p) = 4abg\omega^2 \left[\frac{2}{2p^3} \frac{1}{4\omega^2} - \frac{1}{16\omega^2 p} + \frac{p}{16\omega^2 (p^2 + 4\omega^2)} \right], \\ Z(p) = -\frac{2gb^2}{2p^3} - \frac{ga^2}{4\omega^2 p} + \frac{ga^2 p}{4\omega^2 (p^2 + 4\omega^2)}. \end{cases}$$

Таким образом, получены следующие уравнения движения:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{ag}{4\omega^2} (2\omega t - \sin 2\omega t), \\ y(t) = \frac{gab}{2\omega^2} (\omega^2 t^2 - \sin^2 \omega t), \\ z(t) = -\frac{g}{2\omega^2} (b^2 \omega^2 t^2 + a^2 \sin^2 \omega t). \end{cases}$$

Разложив полученные уравнения в ряд по ωt , имеем:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{ag}{2\omega} \left[t - \frac{1}{2\omega} \left(\frac{2\omega t}{1!} - \frac{8\omega^3 t^3}{3!} + \frac{32\omega^5 t^5}{5!} - \dots \right) \right] = -\frac{ag\omega}{3} t^3 + \frac{ag\omega^3}{15} t^5 - \dots, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} (b^2 + a^2). \end{cases}$$

При $\omega t \rightarrow 0$ система примет вид:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{ag\omega}{3} t^3, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

что согласуется с решением, полученным в [1].

Таким образом, траектория свободно падающего тела лежит в плоскости, перпендикулярной меридиану. Первое уравнение полученной системы указывает на отклонение тела от вертикали в сторону отрицательного отчета координаты x , т.е. с запада на восток.

Оценим отклонение материальной точки от осей координат на широте Нижнего Тагила, т.е.

при $\varphi = 57^\circ$, $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, при падении с высоты 12000 метров.

Имеем:

$$\begin{cases} y_{\text{смещ}} = 0, \\ x_{\text{смещ}} = -15,09 \text{ м.} \end{cases}$$

Таким образом, при свободном падении с высоты $h = 12000 \text{ м}$ на широте Нижнего Тагила материальная точка отклонится в восточном направлении на 15,09 м.

Список литературы:

1. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 2. Динамика / Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – М.: Наука, 1966.
2. Демин С.Е. Операционное исчисление: учеб. пособие / С.Е. Демин, Е.Л. Демина. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2012.
3. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика: Учебник для студентов вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 2005.
4. Пантелеев А.В. Теория функции комплексного переменного и операционного исчисления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: МАИ, 1998.
5. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1979.