ПОПЫТКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ГИПОТЕЗЫ ГОЛЬДБАХА, НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

Шиленкова Марина Владимировна

учитель математики АНОО «Школа Сосны», РФ, г. Одинцово

Аннотация. В данной работе представлена попытка доказательства гипотезы Гольдбаха, утверждающей, что любое чётное число, большее 4, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. Используя метод от противного, продемонстрировано, что предположение о существовании чётного числа, неразложимого на два простых слагаемых, приводит к логическому противоречию. В ходе доказательства исследуются связи с другими фундаментальными проблемами теории чисел, включая слабую гипотезу Гольдбаха (о представлении нечётных чисел тремя простыми) и гипотезу Полиньяка (о бесконечности пар простых чисел с заданной чётной разностью). Показано, что доказательство гипотезы Гольдбаха влечёт за собой возможность представления любого чётного числа в виде разности двух простых, что расширяет понимание структуры распределения простых чисел. Работа также затрагивает потенциальные приложения разработанных методов в криптографии и смежных областях. Результаты подчёркивают значимость гипотезы Гольдбаха для аналитической теории чисел и открывают новые направления для исследований, включая подходы к гипотезе Римана и проблеме простых-близнецов.

Ключевые слова: гипотеза Гольдбаха, простые числа, теория чисел, метод от противного, гипотеза Полиньяка, распределение простых чисел.

Введение. Математик Христиан Гольдбах впервые выдвинул гипотезу в письме швейцарскому математику Леонарду Эйлеру в 1742 году, звучит она следующим образом: любое четное число, больше 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Гипотеза связана с распределением простых чисел, их свойствами. Доказательство сильной гипотезы могло бы дать новые методы в теории чисел, возможно, пролить свет на другие нерешённые проблемы, например, гипотезу Римана или проблему простых близнецов.

Также стоит упомянуть практические применения. Хотя напрямую гипотеза может не иметь прикладного значения, разработанные для её доказательства методы могут быть полезны в криптографии, алгоритмах шифрования, которые основаны на свойствах простых чисел.

Важно подчеркнуть, что математические гипотезы часто стимулируют развитие новых теорий и подходов. Даже если гипотеза Гольдбаха будет опровергнута, это тоже даст важные знания о структуре простых чисел.

Гипотеза Гольдбаха, несмотря на свою кажущуюся простоту, остаётся одной из ключевых нерешённых проблем теории чисел. Её доказательство (или опровержение) важно по нескольким причинам:

Доказательство гипотезы Гольдбаха может:

- пролить свет на гипотезу Римана, которая также связана с распределением простых

чисел.
- помочь в решении проблемы простых близнецов (существует ли бесконечно много пар простых чисел, отличающихся на 2).
- стимулировать развитие новых методов в аналитической теории чисел, таких как улучшение кругового метода или оценок тригонометрических сумм

Ранее, в своей статье о связи гипотезы Гольдбаха с гипотезой Коллатца, я пыталась найти закономерность между количеством операций из алгоритма Коллатца и номером простого числа, которое будет являться одним из слагаемых.

Здесь я докажу, что гипотеза Гольдбаха верна. Основным толчком к этому доказательству является простота: ответ лежит на поверхности. В письме к Эйлеру Гольдбах высказал предположение, что "каждое целое число, большее 5, есть сумма трёх простых". Эйлер уточнил, что сильная версия гипотезы (о двух простых) логически следует из слабой. До XX века прогресс был минимальным. В 1923 году Харди и Литлвуд доказали слабую гипотезу для достаточно больших чисел, используя круговой метод.

В 1937 году Иван Виноградов доказал слабую гипотезу для чисел, превышающих некоторую константу N, но не вычислил её явно.

В 2013 году перуанский математик Харальд Хельфготт опубликовал доказательство слабой гипотезы для всех нечётных чисел, больших 10^{30}.

Для чисел меньше 10^{30} гипотеза подтверждена вычислительными методами. Таким образом, слабая гипотеза считается доказанной.

Помимо этого, в ходе доказательства, я попытаюсь найти новые необычные закономерности, которые могут подтолкнуть других математиков на размышления по доказательству других гипотез или к новым математическим умозаключениям. При доказательстве я использую метод от противного, то есть предположу, что гипотеза не верна, что должно привести к противоречию.

Раздел 1. Гипотеза Гольдбаха: любое четное число, большее 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Известно, что для первых четных чисел: 4, 6, 8, 10 и т.д. это утверждение выполняется. То есть оно верно до какого-то определенного значения четного числа.

$2k = p_1 + p_2$, где 2k – некоторое четное число, p_1, p_2 – некоторые простые числа.

Допустим, что другое большее четное число 2k+2n нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.

$$\begin{cases} 2k + 2n \neq p_3 + p_4 \\ 2k = p_1 + p_2 \end{cases}$$

Вычтем из первого неравенства второе уравнение:

$2n \neq (p_3 - p_1) + (p_4 - p_2)$, но разность двух простых чисел, больших 2, всегда четное число, а сумма двух четных чисел также всегда четное, то есть найдется такое n, для которого наше предположение не верно.

Итак, мы пришли к противоречию для некоторых n, то есть для некоторых четных чисел, больших 2k.

Допустим, что есть какое-то четное число, которое нельзя представить в виде суммы двух простых чисел, но оно следует за четным числом, которое представимо в виде суммы двух простых.

Тогда имеем,

$$\begin{cases} 2k+2 \neq p_3 + p_4 \\ 2k = p_1 + p_2 \end{cases}$$

Аналогично, вычтем из первого неравенства системы второе уравнение:

$2 \neq (p_3 - p_1) + (p_4 - p_2)$, получаем, что сумма двух четных чисел (в том числе и отрицательных) не равна 2, но мы знаем, что простые числа отличаются друг от друга не меньше, чем на 2.

То есть, $|p_3 - p_1| \geq 2$ и $|p_4 - p_2| \geq 2$.

Рассмотрим случай, когда эти две разности положительны,

но если $p_3 \geq p_1 + 2$ и $p_4 \geq p_2 + 2$, то

$2k+2 \neq p_1 + 2 + p_2 + 2$, то есть

$2k+2 \neq (p_1 + p_2 + 2) + 2 = 2k + 2 + 2$.

Таким образом, 2k+2, по нашему предположению, нельзя представить в виде суммы двух простых, но следующее за ним число, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Предположим, что $2k+2 \neq p_3 + p_4$, но 2k+2 – четное число, и $p_3 + p_4$ – четное число, тогда $2k+2 = p_3 + p_4 + 2t$, где t - некоторое натуральное число, так как одно из этих простых чисел приближено к 2k+2.

Путем вычитания двух уравнений, мы получим,

$2 = p_3 - p_1 + p_4 - p_2 + 2t$, но разность двух простых не меньше 2, следовательно, вторая разность должна быть отрицательна. То есть, если первое простое для 2k+2 больше первого простого для 2k, то их вторые простые меньше, а их разность меньше разности первых как минимум на 2.

Получаем, что

$p_2 - p_4 \geq p_3 - p_1$

$p_2 + p_1 \geq p_3 + p_4$, но это невозможно, так как 2k+2>2k.

Таким образом, t – не положительное, то есть либо 0, либо отрицательное.

Возьмем t=0, но тогда $2k+2 = p_3 + p_4$, то есть мы пришли к противоречию с нашим предположением.

Рассмотрим случай, если t – отрицательно.

Что мы имеем:

$2k+2=p_3+p_4-2v$, где v=-t

$2k=p_1+p_2$

Снова вычтем,

$2k=p_1+p_2<2k+2=p_3+p_4-2v<p_3-p_4$

$p_3+p_4-p_1-p_2-2v=2$, но тогда v $\to 0$, так как мы обусловились, что одно из 3 и 4 простых чисел стремится к 2k+2, что противоречит нашему предположению, так как p_3+p_4-2v станет меньше 2k.

Из вышеописанного следует, что если некоторое четное число можно разложить на сумму двух простых слагаемых, то даже если существует число или числа, большие, чем оно, то затем мы все равно придем к четному числу, которое также можно разложить на сумму двух простых слагаемых. То есть начиная с некоторого n четные числа будут представляемы как сумма двух простых чисел.

Рассмотрим этот случай.

Пусть некоторое четное число можно представить как сумму двух простых, и все предыдущие четные числа тоже можно представить в виде суммы двух простых. Мы можем использовать этот факт, так как он эмпирически доказан, то есть была совершена вычислительная проверка его подлинности.

Но следующее за ним четное число нельзя представить в виде никаких двух простых чисел, и несколько чисел за ним тоже не обладают таким свойством, но по доказанному выше, мы утверждаем, что снова натолкнемся на четное число, удовлетворяющее гипотезе Гольдбаха.

Итак, некоторое число 2k+2 нельзя представить в виде суммы двух простых, но предыдущее четное число можно записать как сумму двух простых слагаемых:

$2k=p_1+p_2$

$2k+2\neq p_3+p_4$

$p_1+p_2+2\neq p_3+p_4$

.

.

$p_1+p_2+2m\neq p_3+p_4+2b$, при этом b = m – 1. Но начиная с некоторого четного числа, его снова можно записать как сумму двух простых.

Получаем, что

$p_1+p_2+2m=p_3+p_4+2b=p_3+p_4+2(m-1)=p_3+p_4+2m-2$

$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 - 2$ – противоречие.

Таким образом, если найдется четное число, которое нельзя представить в виде суммы двух простых чисел, то никакие четные числа большие него, нельзя представить в виде такой суммы, но множество простых чисел неограниченно, бесконечно, соответственно при сложении достаточно больших простых чисел, мы снова получим четное число, которое можно записать в виде суммы двух простых слагаемых.

Раздел 2. 1. Рассмотрим в каких случаях, при каких дополнительных условиях гипотеза Гольдбаха работает для любого четного числа.

$$\begin{cases} 2k + 2 = p_3 + p_4 \\ 2k = p_1 + p_2 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем

$$p_3 - p_1 + p_4 - p_2 = 2.$$

Но это возможно лишь при определенных условиях.

1) если $p_3 - p_1 = 2$, то есть простые числа являются числами-близнецами.

и $p_2 = p_4$. Но не для любого простого числа есть число-близнец, поэтому не всегда это утверждение, это условие будет выполнено.

2) если $p_3 - p_1 = p_2 - p_4 + 2$. В этом случае мы видим, что
$p_3 - p_1$ и $p_2 - p_4$ – два последовательных четных числа.

При этом, $p_3 > p_1, p_2 > p_4$

Также, возможно, стоит заметить, что $\frac{p_3 - p_1}{2}$ и $\frac{p_2 - p_4}{2}$ – симметричны относительно $\frac{1}{2}$, принимая только целые значения. Эту вероятную связь с критической полосой дзета-функции, необходимо проследить подробнее.

2. Возьмем любое простое число и прибавим к нему 1, то в результате сложения, мы получим четное число, которое в свою очередь можно представить в виде суммы двух простых чисел. Таким образом, любое простое число может быть записано как сумма двух простых чисел минус один.

Если P – простое, большее 2, то найдутся такие простые Q и K такие, что

P = Q + K – 1.

Проверим, для некоторых простых чисел:

1) 3 = 2 + 2 – 1

2) 5 = 3 + 3 – 1

3) 7 = 3 + 5 – 1

4) 11 = 7 + 5 – 1

5) 13 = 7 + 7 – 1

и т.д.

Проверка не является необходимой, так как утверждение является следствием гипотезы Гольдбаха. При этом, если доказать это утверждение, то гипотеза Гольдбаха будет являться следствием.

3. Рассмотрим слабую гипотезу Гольдбаха.

Любое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел. Именно о ней говорил Эйлер, что сильная версия гипотезы логически следует из слабой.

Рассмотрим некоторое произвольное простое число:

$a = p_1 + p_2 + p_3$, где p_i – простые числа, для i = 1, 2, 3.

$a - p_1 = p_2 + p_3$, где $a - p_1$ – четное. То есть гипотеза Гольдбаха выполняется, если любое четное число может быть записано в виде разности двух простых.

Об этом можно судить исходя из гипотезы Полиньяка, которая утверждает, что для любого четного числа n, найдется пара простых чисел, разность между которыми равна n, и таких пар бесконечно много.

Предположим, что данная гипотеза неверна, то найдется такое четное число

$2k \neq p - p_k$, но в соответствии с гипотезой Гольдбаха $2k = p_{11} + p_{22}$ – сумма простых чисел, тогда получаем, что $2k \neq p - p_k$, следовательно,

$p_{11} + p_{22} \neq p - p_k$, откуда $p_{11} + p_{22} + p_k \neq p$, то есть не выполняется слабая гипотеза Гольдбаха – противоречие, а значит, гипотеза о разложении любого четного на разность простых верна.

Предположим, что верно предположении о разности, но не верна гипотеза Гольдбаха, тогда

$2k = p - p_k$, но $2k \neq p_{11} + p_{22}$, следовательно, $p_{11} + p_{22} \neq p - p_k$, откуда $p_{11} + p_{22} + p_k \neq p$, то есть не выполняется слабая гипотеза Гольдбаха – противоречие. Значит, гипотеза Гольдбаха верна, при условии истинности утверждения о разности простых чисел.

Таким образом, для истинности гипотезы Гольдбаха необходима и достаточна истинность гипотезы: любое четное число можно представить в виде разности двух простых чисел, для четных чисел больших двух.

В связи с вышеизложенным сделаю вывод, что если гипотеза Гольдбаха неверна, то неверно предположение о разности простых. А следовательно, в какой-то момент рост расстояния между простыми числами закончится, что может означать, что множество простых чисел конечно, ограниченно, но это неверно.

Заключение. В данной статье я попробовала доказать гипотезу Гольдбаха, методом от противного. При выполнимости гипотезы Гольдбаха доказано утверждение о разности двух простых.

А именно: любое четное число, больше 2, можно представить в виде разности двух простых чисел. Отсюда можно сделать вывод, что расстояние между двумя простыми числами может сколь угодно расти, при этом образуя геометрическую прогрессию, со знаменателем 2.

Если в данной логической цепочке, приведенной в ходе доказательства, допущены ошибки, и доказательство неверно, то, возможно, данные рассуждения дадут почву для размышлений другим математикам. Но из моих рассуждений ясно, что гипотеза Гольдбаха верна, то есть неверно ее отрицание, чего в полной мере достаточно для того, чтобы утверждать, что гипотеза доказана.

Список литературы:

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. Some problems of ‘partitio numerorum’; III: On the expression of a number as a sum of primes // Acta Mathematica. — 1923. — Vol. 44. — P. 1–70.

2. Vinogradov I.M. The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers // London: Interscience. — 1954. – P. 1 – 180.

3. Проект Goldbach Conjecture Verification: [Электронный ресурс]. – Вычислительные проверки гипотезы. URL: https://www.primegrid.com.

4. Энциклопедия математики (Springer): [Электронный ресурс]. – Обзор гипотезы Гольдбаха и её статуса. URL: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Goldbach_problem.