



# ????????????

??? ?????? ?????????? ??????????, ??? ?????????? ? ??? ???? ??????????????  
 ???????, ?????? ?? ?????????????? ??? ?????? ??????????????. ???????? ?????? ??? ??????????????  
 ??? ?????????? ? ?????????? ??????????, ?????????????? ?? ?????? ?.

????? ?????????????????? ?????????? ??????????, ?????????????? ? ?????????? ?????????????? (??.  
 ?????????????? 1) ? ?????????????????????? ?????????? ???????????.

?????????????????: ??? ?????????????? ?????????????? ?????????????? ??? ?????????????? ??????????????????  
 ?????????????????? ?????????? ?????????? ?????????????? (??, ?????????????? 2).

????????? 1.

## ????????? ?????????? ???????????

| $n m$ | 0     | 1     | 2      | 3           | $m$                      |
|-------|-------|-------|--------|-------------|--------------------------|
| 0     | 1     | 2     | 3      | 5           | $Hyper(2, m, 3) - 3$     |
| 1     | 2     | 3     | 5      | 13          | $Hyper(2, m, 4) - 3$     |
| 2     | 3     | 4     | 7      | 29          | $Hyper(2, m, 5) - 3$     |
| 3     | 4     | 5     | 9      | 61          | $Hyper(2, m, 6) - 3$     |
| 4     | 5     | 6     | 11     | 125         | $Hyper(2, m, 7) - 3$     |
| 5     | 6     | 7     | 13     | 253         | $Hyper(2, m, 8) - 3$     |
| $n$   | $n+1$ | $n+2$ | $2n+3$ | $2^{n+3}-3$ | $Hyper(2, m, n + 3) - 3$ |

## Hyper(a,n,b)

?????????????:  
 – ?????????????????, ?????????? ?????????? ?????????????  
 ?????????????????????? ?????????? ??????????, ?????????????? ? ?????????????? ? ??????????,  
 ?????????????????????? ??? ?????????????????????? 1-??, 2-?? ? 3-?? ?????????? ?????????????????????, ??  
 ?????????? ??????????.

????????????????????? ??????????  $n$   
 ?????????????????? ? ??????????????????  $a$   $b$   $(b)$  ? ??????????????  
 ?????????????????? ??? ?????????????? ??????????????????  $n-1$  ?

????????????????????????????? ??  $b$   
 ?????????????????? ??????????????, ?????????? ?? ?????????? ??????  $a$

- ????????  $a$   $b$  — ?????????? ??????  $a$  ?? ??????????? ??????, ??????  $b$ :

$$a^{(1)}b = a + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b = a + b$$

- ??????????  $a$   $b$  — ?????????? ??????  $a$  ? ?????? ??????  $b$  ???:

$$a^{(2)}b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b = a \times b$$

- ???????????  $a$  ? ????????  $b$  — ?????????? ??????  $a$  ?? ??? ????  $b$  ???:

$$a^{(3)}b = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_b = a^b$$

·

$$a^{(n)}b = \underbrace{a^{(n-1)}a^{(n-1)} \dots a^{(n-1)}a}_b$$

? ?????????? ?????????? ?????????? ?????????????? ?????? ??????, ??? ??????????

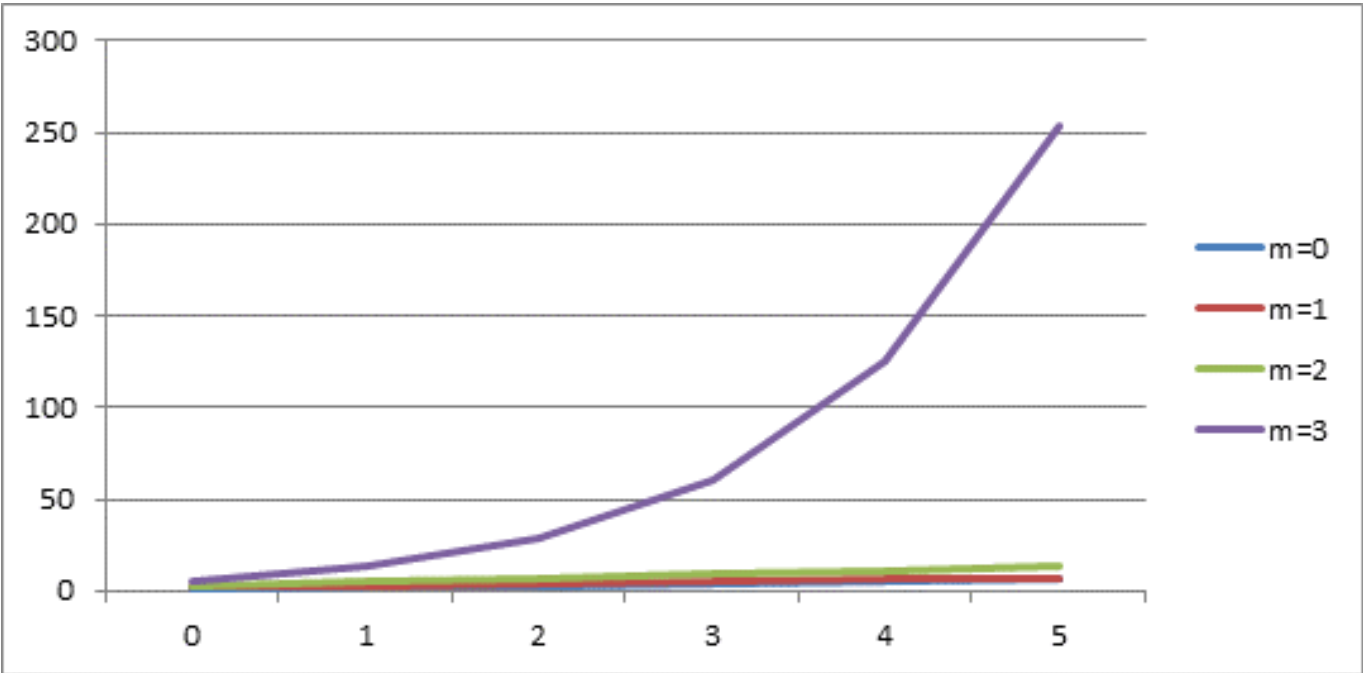
??????????????, ??? ??? ?????????????????? ????????  $n > 2$  ?? ?????????? ?? ??????????????????, ?? ??????????????????. ?????????????????? 4-??, 5-?? ? 6-?? ???????? ?????????????? «?????????», «?????????» ? «?????????» ??????????????????.

????? ??????????????? ?????????? ?????? ?????????????? ???:

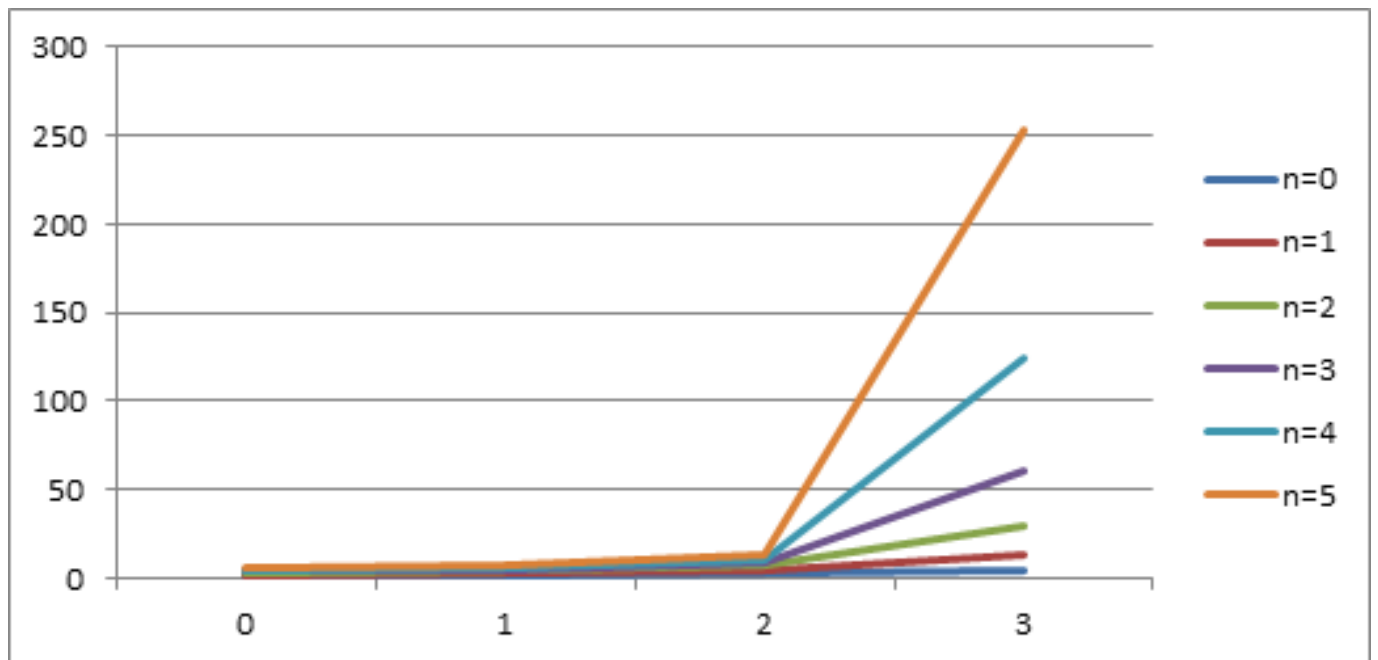
$$a^{(n)}b = \begin{cases} b+1, & n=0 \\ a, & n=1, b=0 \\ 0, & n=2, b=0 \\ 1, & n\geq 3, b=0 \\ a^{(n-1)}(a^{(n)}(b-1)), & n=1, b=0 \end{cases}$$

?????? ??????? ??????? ? ????????? 4.

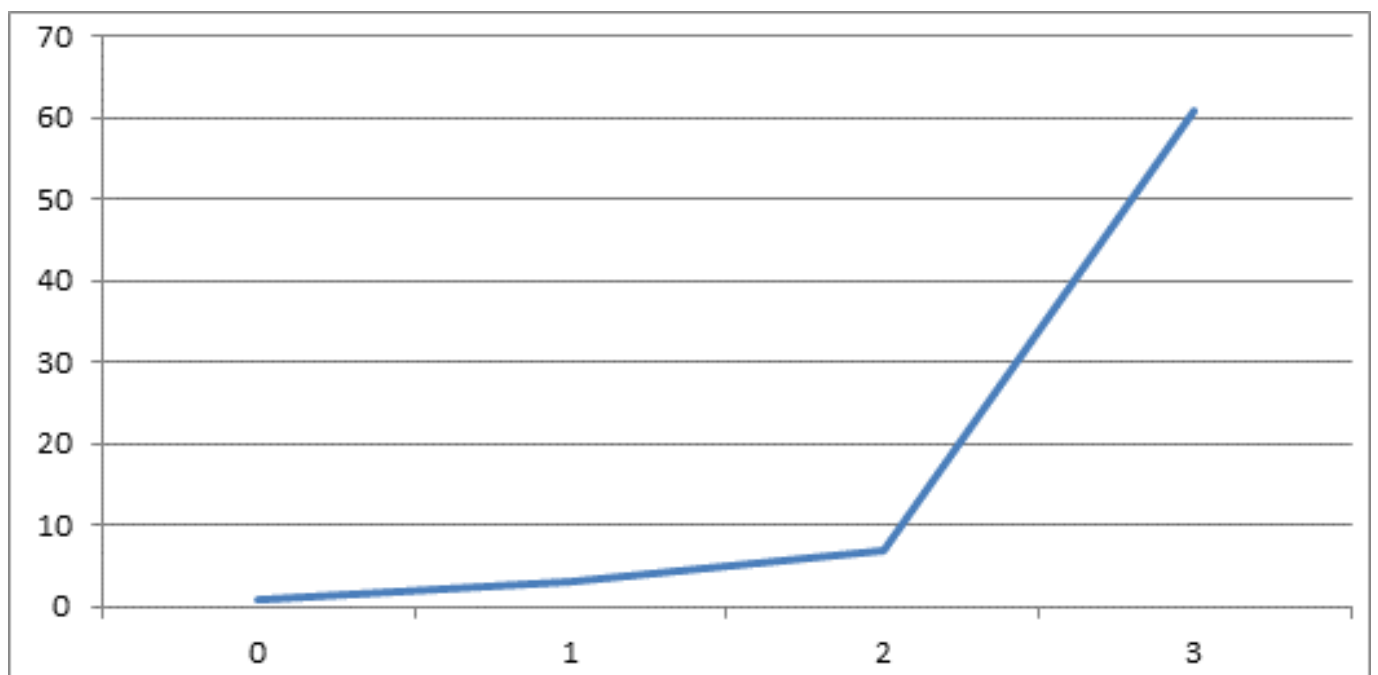
???? ?????????? ?????????? ??????? ??? ?????????????? ?????? ???????:



??????? 1. ??????? ?????????? ??? ?????????????? ?????????? *m*



??????? 2. ??????? ?????????? ??? ?????????????????? ??????????  $n$



???????? 3. ??????? ?????????? ???  $m^n$

?????? ?????? ?????????? ??????????????????, ??? ??????? ?????????? ?????? ?????????

??????, ?????????? ?? ??????????  $m > 2$   $n > 2$

????? ?? ???????? ???????????? ?????????????? ?????????? ?????????? ??, ??? ??? ??  
 ?????? ??????? ??????. ??????? ?????? ?????????????? ??????????, ??? ?????????? ??????????? ??  
 ?????????? ?????????????? ??????????????.

????????????? ??????????? ????????? ???.

????????? ?????? ?????????, ??? ?? ?????????????????? ??????????  $g$  ??????????? ??????????:

$g(x_1 \dots x_k) < f(x)$ ,    если  $\forall(\vec{x}_i)$  имеет максимум при  $x_i = m$ ,  
 тогда  $g(x_i \dots x_m) < f(m)$

??? ?????????? ?????????? ?????????????????? ??????? ?????????????????? ??? ?????????? ??????????  
 ??????????, ??? ???  $g(n) < f(n)$   
 ?? ??? ?? ??????.

????????, ????? ??? ? ?????, ?? ?????????????? ???????????, ??? ?????????? ?????????????? ??  
 ??????????? ?????????????????? ?????????????????, ??? ??? ??? ??????????????-????????????????? ??????????  
 ?????? ?????????????????? ?????????? ?????????????? ??????????????.

????????????????? ?????????????? ??????????????

$$A(0,0) = 0 + 1 = 1$$

$$A(1,0) = A(0,1) = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} A(3,0) &= A(2,1) = A(1,A(2,0)) = A(1,A(1,1)) = A(1,A(0,A(1,0))) \\ &= A(1,A(0,A(0,1))) = A(1,3) = A(0,A(1,2)) \\ &= A(0,A(0,A(1,1))) = A(0,A(0,A(0,A(1,0)))) \\ &= A(0,A(0,A(0,A(0,1)))) = A(0,A(0,A(0,2))) = A(0,A(0,3)) \\ &= A(0,4) = 5 \end{aligned}$$

????????? ??????, ??? ?????????????? ?????????? ?????????? ?????????????????? ?? ?????? ??????????????????  
 ?? ?????????????????????????? ??????????????????????. ??? ??????????? ?????????? ????????????

$$A(5,0) = A(4,1) = 65533$$

. ?????? ??????????, ????? ? ?????????????????? ???????,

?????????? ??????????? ? ?????????????????? ?????????? ??????????????, ?? ?????????????????? ?????????? ??????????  
 ??????????? ?????????????????? ?????????? ??????.

¿ ?????????, ?? ??????, ???:

$$A(x,x) > pr(x) \forall pr \in PR$$

, ??? PR - ????????? ??????????-  
???????????? ???????.

????????????????:

???????????? ?????????, ?????? ?? ?? ?????? ???????????.

$$A(x,x) > S(x) \wedge A(x,x) > pr_i^k(x_i) \text{ для любых значений } k$$

$$?????????, ????????????? S(x) = x + 1$$

?? ?????????????? ? ??? ??

?????????, ??? ? ?????? ?????????, ?????? ?? ?????? ?????? ?????????

????????????, ??? (I) ?????? ?????????-???????????? ??????? ??? (II)

???????????? ????????????? (\*) ?????????? ????????????? ??????? "???????????????? ?

???????? ?????????", ??? ?????? ??????????. ??????, ??? ?????? ??????? ??

???????????? ?, ?????????????, ??????? ?????????? ?? ????????? ??????????-

???????????? ?????????.

(\*): ????????????? – ?????????? ?????????, ??????????????? ?? ?????? ?????????  
??????????.

?????????????:

·  $A -$  ???????

·  $\alpha, \beta, \gamma$   
– ?????? ?? ??? ?????????

·  $a_1 \dots a_n$   
 $b_1 \dots b_n$  – ?????????? ?????? ?????? ??????

????

$$\alpha = Accer, \beta = man$$

??

$$\gamma = \alpha \cdot \beta = Accer \cdot man = Accerman$$

?????? ??????? (I):

$$f = g(h)$$

????????, ??? f, g, h – ?????????? ??????????? ???????.

$$g < A_i, h < A_j, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

????????? ??????? ????????????

$$m > \max\{i, j\}$$

???????? ??????????. ?????? ?????????, ???, ?????? ?? ?????? ?????????,

???:

$$f(x) < A_{m+1}(x)$$

????????? ??????????? ????????? ??????????:

$$A_m^x(x) = A_m\left(A_m(\dots A_m(1))\right)$$

$x$  ???

?????? ????????? ??? ??? ????, ????????? ????????? ? ??????????????????. ?????? ?????????, ???:

$$1. \quad x \leq A_m^{x-1}(1) \tag{1}$$

$$2. \quad A_m^{x+1}(1) = A_{m+1}(x) \tag{2}$$

$$A_0^{x-1}(1) = x$$

?? ?????? ?????????, ??? (1) ????????? ?? ????, ??? . ??????? ??????????

$$x = 3, m = 1: A_m^{x-1}(1) = A(1, A(1, 1)) = A(1, 3) = 5 > x.$$

???

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left( \dot{r}^2 \right) = m \dot{r} \ddot{r} = m \dot{r} \frac{dr}{dt} = m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( r^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left( r^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left( r^2 \right), \quad (1)$

$$A_{m+1}(x) = A(m+1, x) = A(m, A(m+1, x-1)) = A(m, A(m, A(m+1, x-2))) = \dots = A(m, A(m \dots A(m+1))) = A_m^x(A(m+1)).$$

???????? (2) ? ????????? ?????????????:

$x_{???}$

??? ????????? ????????????? (2), ??? ??? ?????? ??????, ????? ?????  
 ?????????? ?????????? ?????? 0, ?? ?????  $A_m^0(1) = A_{m+1}(0)$ .

$$g(h(x)) < A_i(A_i(x)) < A_m(A_m(x)), \quad g(h(x)) -$$

?????????? ?????.

$A_m(A_m(x)) < A_m(A_m(A_m^{x-1}(1)))$   
 $A_m(A_m(A_m^{x-1}(1))) = A_m^{x+1}$

?????? ?????? ??????????:  $A_m(A_m(x)) < A_{m+1}(x)$

???? ????????? ????????????????? (I), ??? ??? ??????????? ?????????? ?????????  
 ??????????, ????????? ????????? ????????? ????????????? ?????? ??? ????????????? ?????????????  
 ?????????, ????????? ?????????????? ?????????? ??????????.

???????? ???? (II):

???    ?????    ????????????,    ???    ???????????    ???????     $f(x)$ ,    ??????????????  
 ???????????????    ??????????????.

???????????????? ?????.

$$f(0)=c$$

$$f(n+1)=g(n,f(n))$$

$$\begin{array}{l} \text{?????, ?????????? } g \\ \text{???????????? ?????????????? ?? ?????, ??? ????????????? ?????????} \\ \text{???????????? } A_i(x) \\ \text{, ????????? ??????? ??? } g \\ \text{, ? ?? ?????? ??????????, ??? } f(x) < A_m(x) \end{array}$$

$$\text{??? ????????????? } m > 0.$$

$$\text{?? ?????? ?????????????????? ??????????}:$$

$$\begin{array}{l} \text{???????? ??????: ?? ?????, ??? } f(0) \\ \text{????????? ?????????????? ?????????, ?????????????} \\ \text{????????????-????????????? ????????? ?????????????????? ?????????, ????????? ?? ?????? ??????} \\ \text{???????????????? ?????????????? ????????? ?????????????, } A_j(0) \\ \text{???????? } f(0) \\ \text{, ??? ?????????????} \\ \text{???????? ???????.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{????????????????? ??????????: ??????????????, ??? ?????????????? ?????????????? ??? ?????} \\ \text{???????? } k \leq f(n) \\ \text{.} \end{array}$$

$$\text{????? } m > \max\{i+1,j\}, \text{? } f(n+1)=g(n,f(n))$$

$$\text{?????:}$$

$$g(n,f(n))<g(f(n),f(n))$$

$$\text{??? ??? g ??????????????. ?? ?????????????????? ?????????? ?? ??????:}$$

$$g(n,f(n))<A_i(f(n))<A_i(A_m(n))$$

$$\text{??????? ?????????????????? ? ?????? ?????????? ??? } m \\ \text{?????:}$$

$g(n,f(n)) < A_{m-1}(A_m(n))$

?????? ?? ????? ?? ????????????? ???????? ?????????? ? ?????????????, ???:

$g(n,f(n)) < A_m(n+1)$

?????? ?? ????? ???????, ???  $f(n+1) < A_m(n+1)$  , ?????? ??????? ???  
???????? ?????????? ?? ????????? ????????????? ?????????????, ??? ??? ??? ?????? ???  
???????????? ????????????? ?????????.



????? ????????????? ?????????? ????????? ???????????.

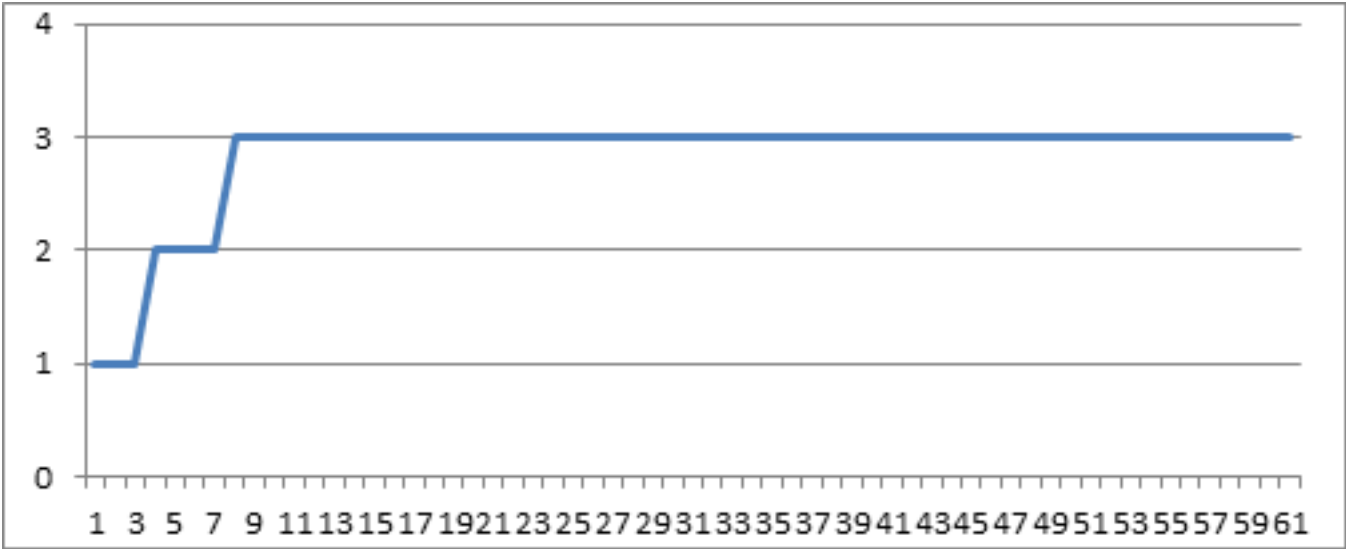
???????? 2.

????????? ?????????? ????????? ???????????

|                       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| <i>n</i>              | <i>1</i> | <i>2</i> | <i>3</i> | <i>4</i> | <i>5</i> | <i>6</i> | <i>7</i> | <i>8</i> | <i>9</i> | <i>10</i> |
| <i>f</i> <sup>1</sup> | 1        | 1        | 1        | 2        | 2        | 2        | 2        | 3        | 3        | 3         |

|           |     |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>11</i> | ... | <i>53</i> | <i>54</i> | <i>55</i> | <i>56</i> | <i>57</i> | <i>58</i> | <i>59</i> | <i>60</i> | <i>61</i> |
| 3         | ... | 3         | 3         | 3         | 3         | 3         | 3         | 3         | 3         | 3         |

|           |           |           |           |           |           |           |           |                                               |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------------------------------------|
| <i>62</i> | <i>63</i> | <i>64</i> | <i>65</i> | <i>66</i> | <i>67</i> | <i>68</i> | <i>69</i> | ...                                           |
| 4         | 4         | 4         | 4         | 4         | 4         | 4         | 4         | <i>Hyper</i> (2, <i>m</i> , <i>n</i> + 3) − 3 |



??????? 4. ????????? ????????? ?????????

?????? ?? ????? ?????????, ??? ?????????????? ?? ????? ?????, ?????????????????? ??  
??????? ? ?????????????? ??????????????, ?????????? ?????????? ?????????? ?????????? ?????? ??????  
5.

????? ?????????? ?????????????? ?????????????? ?????????????? ?????????? ?????????  
????????????? ??? ??? ??? ????? ??????????????. ??????????, ??? ??????????????  $A(2,0)$  ??????????????  
????????????? ?????????????????????  $A(1,1), A(1,0), A(0,1), A(0,2)$  . ?????? ?????? ?????  
????????? ?????????? ?????????????.

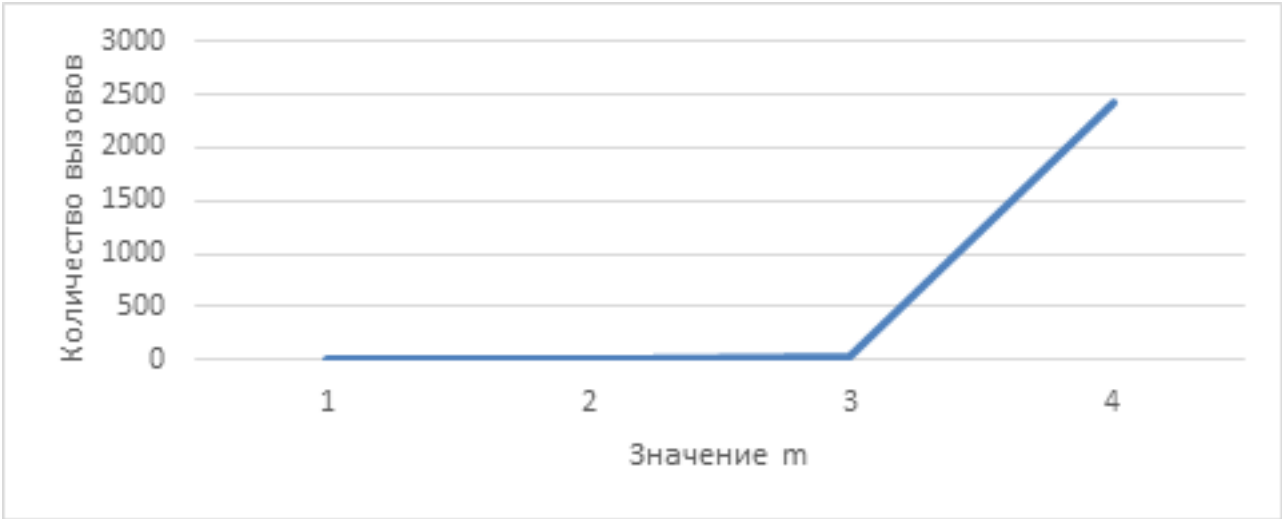
????????? ?????????????????????? ?????????????? ?????????????? ?????????????? ??????????????

????????? 3.

?????????????

| N\M | 0 | 1  | 2   | 3      |
|-----|---|----|-----|--------|
| 0   | 1 | 2  | 5   | 15     |
| 1   | 1 | 4  | 14  | 106    |
| 2   | 1 | 6  | 27  | 541    |
| 3   | 1 | 8  | 44  | 2432   |
| 4   | 1 | 10 | 65  | 10307  |
| 5   | 1 | 12 | 90  | 42438  |
| 6   | 1 | 14 | 119 | 172233 |
| 7   | 1 | 16 | 152 | 693964 |

????????? ??????? ? ???????? ?????????? ???????? ??????????? ? ???????????  
 ?????????????? ????????? ??? ?????????????????????? ?????????????, ?????? ?????????????????, ???  
 ??????? ?????????? ?????????? ?????????? ?????????? ???????????.



???????? 5. ?????????????? ?????????????????? ?????????? ??????????  $A^{(m,m)}$

$$K(m,n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Количество рекурсивных вызовов функции} \\ \text{Аккермана при вычислении } A(m,n) \end{array} \right\}$$

?????? ??????????? ?????? ?????????? ???????????????, ?????? ?????? ?????? ?????????

????????? ????????????? ???????? ????????????? ?????????????, ?? ?? ??????  
 ??? ????????????? ????? ?????????? ?? ?????????, ? ??? ????????????? ????????? ??????????????

?????????,  $m = 0$   
 , ?????????????  $n + 1$   
 , ?  $1$   
 , ??? ??? ? ?????? ?????? ?????????

???????? ????? ????. ??? ?????????  $m > 0, n = 0$   
 ????????? ?????????????? ?????????

?????????? ?? ? ?????????? ?????????????????? ?????????, ?? ??? ? ?????????????

????????? ?????????  $A(m - 1, 1)$   
 ?????????????????? ??? ? ??? ??????, ????????? ??????????????

??????. ??? ?????????????? ?????????? ?????????????????? ??????????????????  $A(m, n - 1)$   
 ???

??? ?????? ?????????? ?????? ?? ?????? ?? ??? ? ? ?????????? ?????????????, ?? ? ??????

?????????? ?????????????? ?????????????  $K(m, n - 1)$   
 , ?????? ?????????? ??????????????

??????????????????  $A(m, n - 1)$   
 , ? ?????? ?? ?????????? ?????????????? ??????????,

?????????????????????? ?????????????????? ??????. ? ?????? ?????????????? ??????????, ??????????????????

??????? ?????????? ?????????????? ?????????????????? ?????????? ??????????????, ? ??????????????????

?????????????????????? ?????????????????, ?????????????????????????? ?????????????????? ??????????????????

?????? ?????????????? ?????????????? ??????????:

$$K(m, n) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ K(m - 1, 1) + 1, & m > 0, n = 0 \\ K(m - 1, A(m, n - 1)) + K(m, n - 1) + 1, & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

?????? ?????????????? ?? ?????? ?????????????? ??????????????, ? ?????? ????????????? ?  
 ????????? ? ?????? ??????????. ??? ? ? ?????????? ?????????

$$C(m, n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Количество рекурсивных вызовов функции} \\ K(m, n) \text{ при вычислении } K(m, n) \end{array} \right\}$$

??????, ?????? ?????????? ?????? ?????????, ?????????????? ?????????  
 ??????????????????  $K(m, n)$   
 ?????????????????? ??????????????, ? ??????????????????  
 ?????????????????? ?????????? ?? ?????????? ?? ?????? ??? ??????????, ? ??? ?????????????

??????? ???????????? ????????? ?????????????? 1. ??? ??? ???????  $K(m,n)$  ??????????

???????????? ????????????? ????????? ???????????, ?? ?? ?????? ?? ?? ?????????, ??? ? ???

?????? ???????  $K(m,n)$ , ?? ????? ??????? ?????????? ? ??? ??????????, ???

??????????????????? ? ?????????????????? ??????????? ?????????  $K(m,n)$ .

????????? ???  $C(m,n) = K(m,n)$ , ?? ????? ?????????????? ?????????????? ?????????

?????????  $K(m,n)$  ??? ?????????????? ?? ?????????? ?????? ?????? ?? ?????????????????

?????????.

$$K(m,n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Количество рекурсивных вызовов функции} \\ K(m,n) \text{ при вычислении } K(m,n) \end{array} \right\}$$

????????? ? ????????? ? ????????? ?????? ??????????. ????????? ?????????? ?? ??? ?????????

???????????? ?????? ?????????, ??? ?????????????????? ?????????? ??????

?????? ???????????? n ?????????????????? ?? ?????????? ?? ?????????????? ?????????????????? ?????????.

?????? ?????????? ?????? ?????????? ?????????? ?????????? ?????????????????? n ?? ??????????????

????? ?????????? ?????????? ? ?????????? ? ??????????  $K(m,n)$ . ?? ?????? ?????????? ?????????????

?????? ?????????? ??????, ???  $n$  ?????????????? ?????? ?? ?????????, ????? ? ?????????, ????? ?

????????? ?????????, ???????  $n$  ?????? ?????????????? ?????????????? ?????????????? ?????? ?????????????

???????????? ?????????? ?????? ? ?????? ?????????? ??????????????????????. ????? ?????????????? ?????? ??????

??? ?????????????? ?????????????????? ??????????  $m > 0, n > 0$ . ????? ?????????? ?????????????????????

?????????? ?? ????????? 6.



$A(3, 3)$

$K(m, n)$

$K(n, n)$

$A(n, n)$

1. . – / . . – : , 2012. - 132.

2. ?????? ?. ????????????. ???????? ? ?????? ???????????? ???????. / ?. ??????? – ??????: ??, 1983. – 256 ?.

3. ????? ?. ??????????? ??????? / ?. ??????. – ??????: ?????????????? ??????????? ??????????, 1954. – 264?.

??? ?? ????? ?

??????????? 1.

```
long RecursionAckermann (int m, int n)
```

```
{  
  
    if (m == 0)  
    {  
  
        return n + 1;  
  
    }  
  
    else if (n == 0 && m > 0)  
    {  
  
        return RecursionAckermann(m - 1, 1);  
  
    }  
  
    else  
    {  
  
        return RecursionAckermann(m - 1, RecursionAckermann(m, n - 1));  
  
    }  
  
}
```

??????????? 2.

```
const int tsize = 20000;
```

```
int s[tsize];
```

```
long IterationAckermann (int m, int n)
```

```
{
```

```
    int t = 1, d = 1;
```

```
    s[t] = m;
```

```
    do
```

```
    {
```

```
        m = s[t--];
```

```
        if (!m)
```

```
            n++;
```

```
        else if (!n)
```

```
        {
```

```
            s[++t] = m - 1;
```

```
            n = 1;
```

```
        }
```

```
        else
```

```
        {
```

```
            s[++t] = m - 1;
```

```
            s[++t] = m;
```

```
            n -= 1;
```

```
        }
```

```

        if (t > d)
        {
            d = t;
            if (d > tsize)
                return -1;
        }
    }

    while (t);

    return n;
}

```

?????????? 3.

```

int ReverseAckermann (int n)
{
    int k = 1;
    int value;
    while(true)
    {
        value = RecursionAckermann(k, k);

        if(value >= n)
            return k;

        k++;
    }
}

```

}

?????????? 4.

double Hyper (int a, int n, int b)

{

if (n == 0)

return b + 1;

if (n == 1 && b == 0)

return a;

if (n == 2 && b == 0)

return 0;

if (n >= 3 && b == 0)

return 1;

if ( n>= 1 && b >= 1 && a >= 0)

return Hyper(a, n-1, Hyper(a, n, b - 1));

return -1;

}