

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИМЕНЕНИЮ ЗАДАЧ

Байрамгулова Алия Маратовна

студент Стерлитамакского филиала Башкирского Государственного Университета (СФ БашГУ), РФ, Республика Башкортостан, г. Стерлитамак

Аннотация. Актуальность данной темы статьи заключается в углублении знаний по теме «аффинные преобразования плоскости», которое позволяет решать задачи на преобразование и их свойства. Изучаются понятия аффинных преобразований плоскости, их свойств, особенностей и применению их на практике. Целью данной работы являются рассмотрение и изучение аффинных преобразований плоскости. При раскрытии темы применяются методы: теоретический и практический. В теоретической части рассматриваются теория аффинного преобразования, изучаются свойства (групповые свойства). В практической части представлены задачи аффинных преобразований, в которой используются их групповые свойства.

Ключевые слова. аффинные преобразования, групповые свойства аффинных преобразований, теория аффинного преобразования.

Изначально отметим о том, что в случае, когда в задаче затронуты лишь такой вид свойств фигур, сохраняющиеся в процессе произвольного аффинного преобразования, такой вид задачи называют как аффинная.

В случае, когда в задаче вопрос затрагивает свойства, которые сохраняются в процессе преобразования подобия, нарушающиеся при том или ином аффинном преобразовании, такой вид задачи называют как метрическая.

К примеру, в задаче «по доказательству того, что медианы треугольника пересечены в одной точке» - является аффинной, а такой вид задач в отношении высоты и биссектрисы - метрической [3, с. 104].

Отметим, что в случае отображения плоскости P в плоскость R - закон или правило, по которому каждой точке плоскости P сопоставляется некая выявленная точка на плоскости R . Обозначают как $f: P \rightarrow R$.

В случае, когда необходимо указать то, что точке A в плоскости P соответственно определяется точка B на плоскости R , получаем $B=f(A)$, в данном примере B является образом точки A , а точка A - прообразом точки B .

Совсем является не обязательным то, чтобы в каждой точке плоскости R есть определение еще какой-то точки. В случае, когда в отношении некоторого отображения плоскости P и R являются совпадающими, то данный вид отображения называют как преобразование плоскости.

Отображение $f: P \rightarrow R$ называют как взаимно однозначные, в случае, если в отношении каждой точки плоскости R имеется прообраз, и потом лишь один [5, с. 48].

В случае выбранных систем координат на плоскостях Р и R отображение сопоставляется в отношении пары чисел (х, у) и пары чисел (х', у'). В свою очередь, при задаче отображения при выбранном СК - это то же самое, что и задавать два вида функций.

В этом случае, у каждой имеется зависимость от двух независимых переменных в виде:
 $x' = \varphi(x, y)$, $y' = \psi(x, y)$.

Процесс преобразования f плоскости Р называют линейным, когда на Р есть такой вид декартовой системы координат, в которой f можно записать через формулы как:
 $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$. Так, становится более ясно то, что взаимно однозначное линейное преобразование -аффинное.

С целью преобразования, которое задано через формулы $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$, чтобы

оно являлось взаимно однозначным, нужно и достаточно, лишь: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Так, аффинное преобразование определено через формулы: $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$ с учетом условия,

что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Геометрическими свойствами аффинных преобразований являются такие как: к примеру, рассмотрим на плоскости прямую с уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ и найдем её образ при преобразовании f. (Образ прямой является множеством образов в её точках). Радиус-вектор образа М' произвольной точки М возможно определить посредством [1, с. 94]:

$$\vec{OM}' = \vec{Of}(O) + \vec{f}(O)M' = \vec{c} + f(\vec{r}) \quad (1),$$

$\vec{c}$ - постоянного вектора $\vec{Of}(O)$

а $\vec{r}$ - радиуса-вектора точки М.

Исходя из свойств линейных преобразований получим:

$$\vec{OM}' = \vec{c} + f(\vec{r}_0) + f(\vec{a})t$$

Так как f является аффинным преобразованием, и $\vec{a} \neq \vec{0}$ то $\vec{a}$ перейдет в вектор

$f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ и уравнение $\vec{OM}' = \vec{c} + f(\vec{r}_0) + f(\vec{a})t$ - это уравнение прямой линии. Таким

образом, образы всех точек по прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ лежат на прямой. F определяется как взаимно однозначный вид отображения одной прямой в отношении другой [4, с. 73].

1. В случае аффинного преобразования прямая линия уходит в прямую линию, отрезок уходит в отрезок, параллельные прямые уходят в параллельные.

2. В случае аффинного преобразования отношение длин параллельных отрезков не изменен.

В доказательство приведем пример: пусть отрезки AB и CD являются параллельными. Это выявляет то, что есть такое число λ , и образы векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ связанные с

зависимостью $\vec{A'B'} = \lambda \vec{C'D'}$. Ясно, что $\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{CD}|} = \frac{|\vec{A'B'}|}{|\vec{C'D'}|} = |\lambda|$ [6, с. 28].

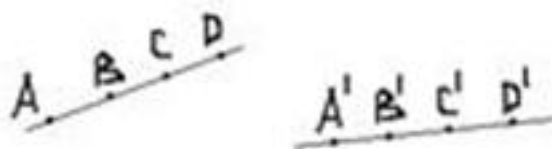
Получаем следующий вид следствия: в случае, если точка C разделяет отрезок AB в отношении λ , то её образ C' разделяет образ $A'B'$ отрезка AB в том же отношении λ .

Таким образом, выделим следующий вид свойств в аффинном преобразовании посредством:

1. Образу параллельных прямых определенные параллельными прямыми:



2. Аффинное преобразование сохраняет соотношение двух отрезков, которые расположены на одной прямой $AB/CD = A'B'/C'D'$:



3. Аффинное преобразование сохраняет соотношение параллельных отрезков.

4. Аффинное преобразование угла и отношение произвольных отрезков не сохраняется, ведь любой треугольник возможно перевести в любой иной. Так высота и биссектриса треугольника преобразуемы обычно в иные виды линий, медиана также может переходить в медиану, а середина отрезка может переходить в середину.

Таким образом, в случае аффинного преобразования параллелограмм переходит в параллелограмм, трапеция в трапецию [2, с. 57].

Список литературы:

1. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. - М.: МЦНМО, 2016. - 240 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - 12-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015 - 312 с.
3. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. - М.: МЦНМО, 2016. - 250 с.
4. Иванов М.Г. Геометрия и тригонометрия на плоскости. - М.: МФТИ, 2017. - 228 с.
5. Парамонова И.М. Симметрия в математике. - М.: МЦНМО, 2017. - 216 с.
6. Понарин Я.П. Аффинная и проективная геометрия. - М.: МЦНМО, 2016. - 288 с.