ПОДОБИЯ ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Билалова Гульдания Фанисовна

студент, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, РФ, г. Стерлитамак

Шабаева Альфия Фаритовна

канд. физ.-мат. наук, доцент, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, РФ, г. Стерлитамак

Аннотация. В данной статье рассматривается подобие плоскости, а также применение подобия при решении задач элементарной математики.

Ключевые слова: подобие, гомотетия, преобразование.

Подобием или преобразованием подобия называют преобразование плоскости, для которого $\exists$ число $k > 0$ такое, что для $\forall\, A, B$ и их образов A', B', $A'B' = k \times AB$.

Пример:

1) Так как для $\forall$ движения $A'B' = AB$, то движение – это подобие с коэффициентом $k = 1$.

2) Гомотетия – это преобразование плоскости, для которого задан центр O и коэффициент $m\ (m \neq 0)$, так что произвольная точки $M \to M'$ и $\overrightarrow{OM'} = m \times \overrightarrow{OM}$. Обозначение H_0^m.

Пусть $m = 2$

$$\overrightarrow{OM'} = 2 \times \overrightarrow{OM}$$

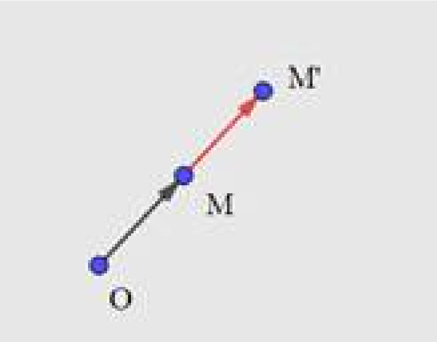

Рисунок 1. Пример при $m = 2$

$$m = -2$$

$$\overrightarrow{OM'} = -2 \times \overrightarrow{OM}$$

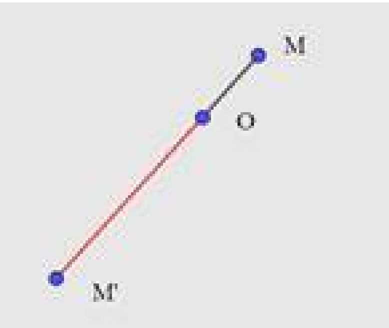

Рисунок 2. Пример при $m = -2$

Пусть гомотетия H_0^m M_1àM_1', M_2àM_2'. Тогда по определению получаем:

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = m \times \overrightarrow{M_1M_2} \quad (3)$$

По определению произведение вектора на число получаем:

$$|\overrightarrow{M_1'M_2'}| = |m| \times |\overrightarrow{M_1M_2}|$$

или $\overrightarrow{M_1'M_2'} = |m| \times \overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow H_0^m$ является подобием с коэффициентом подобия $|m|$.

!

Пусть задана H_0^m. Введём ПСК $(O\ \vec{i}\ \vec{j})$. $H_0^m: M(x,y) \to M'(x',y')$

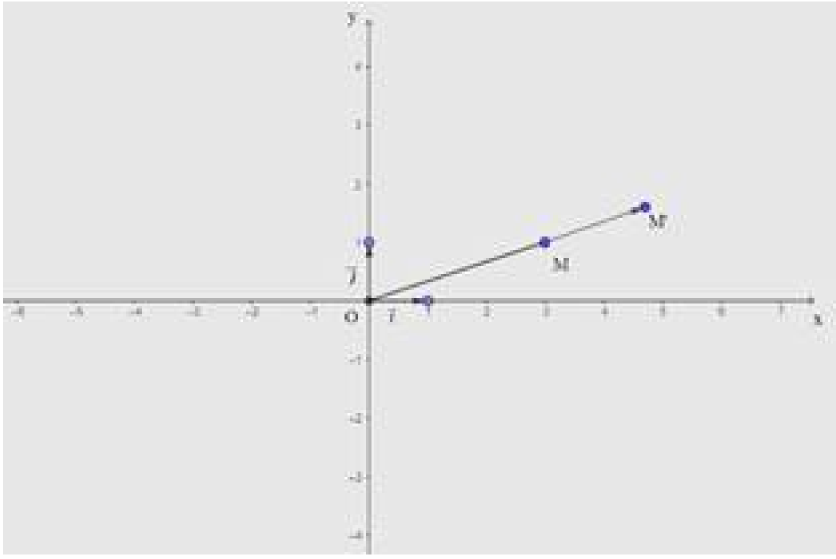

Рисунок 3. Графическое изображение

По определению $\overrightarrow{OM'} = m \times \overrightarrow{OM}$ координаты $\overrightarrow{OM'}(x',y')$, $\overrightarrow{OM}(x,y)$. Тогда,

$$\begin{cases} x' = m \times x \\ y' = m \times y \end{cases}$$ - формула H_0^m.

Рассмотрим простейшие свойства H_0^m.

1) H_0^m прямую переводит в прямую.

2) H_0^m сохраняет простое отношение трёх точек,

если $(AB,C) = \lambda$, то $(A'B',C') = \lambda$.

3) H_0^m сохраняет величину угла.

4) H_0^m сохраняет ориентацию плоскости.

Рассмотрим две подобия f с коэффициентом k_1 и $g - k_2$. Пусть $f: \begin{matrix} A \to A_1 \\ B \to B_1 \end{matrix}$

$g: \begin{matrix} A \to A' \\ B \to B' \end{matrix}$. По определению подобия $A_1B_1 = k_1AB$, $A'B' = k_2AB$ ⇒

⇒ $A'B' = k_1 \times k_2AB$. Следовательно, композиция $g \circ f$ – подобие с коэффициентом $k_1 \times k_2$.

f^{-1} – подобие с коэффициентом $\frac{1}{k_1}$.

Определение. Если преобразование подобия сохраняет ориентацию плоскости, то его называют преобразованием подобия I рода.

В противном случае II рода.

Пусть f – подобие с коэффициентом $k.$ Введём ПСК $(O\,\vec{i}\,\vec{j})$. Тогда,

$\begin{cases} x' = kxcosa - \varepsilon ksin\alpha + x_0 \\ y' = kxcosa - \varepsilon ksin\alpha + y_0 \end{cases}$ – формулы подобия с коэффициентом k в ПСК.

$\varepsilon = 1,$ если f подобие I рода,

$\varepsilon = -1$, если f подобие II рода.

Если задана преобразование плоскости

$\begin{cases} x' = ax - \varepsilon by + c \\ y' = bx + \varepsilon ay + d \end{cases}$ – где $a, b, c, d \epsilon R \quad \varepsilon = \pm 1,$ то оно есть преобразование подобия с коэффициентом $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

При $\varepsilon = 1$ – подобие I рода, $\varepsilon = -1 -$ подобие II рода.

Задача 1. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок OF -перпендикуляр, проведенный к стороне AD. Вычислить длину стороны ромба, если $BD = 12\text{см}, FD = 4\text{см}$.

Решение:

ΔOAD подобен ΔFOD, так как $\angle CAD = \angle FOD$.

Тогда мы можем составить пропорцию

$$\frac{AD}{OD} = \frac{OD}{OF}$$

$$\frac{AD}{6} = \frac{6}{4}$$

$AD = \frac{36}{4} = 8$ см Ответ: 8см.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90°, BC = 13$ см, CD – высота, $CD = 12$. Найдите $DB, AC.$

Решение:

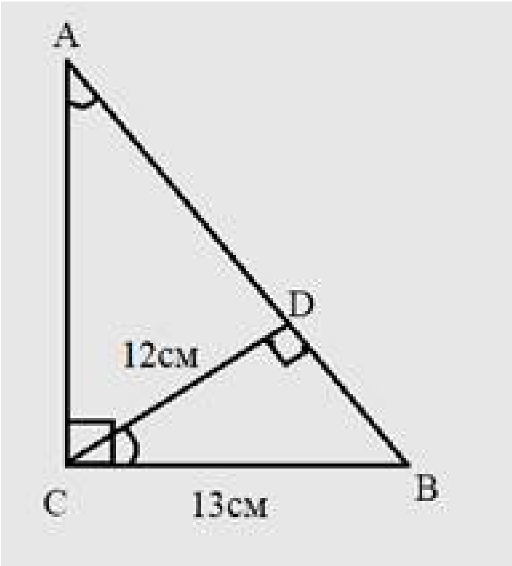

Рисунок 4. Иллюстрация к задаче 2

1) $CD \perp AB, \angle CDB = 90°,$

ΔCDB – прямоугольный, по теореме Пифагора

$CB^2 = CD^2 + DB^2, DB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ см.

2) $\Delta CDB \sim \Delta ADC;\ \angle A + \angle B = 90°, \angle B = 90° - \angle A;$

$\angle CAD = \angle DCB, \angle ADC = \angle CDB = 90°, \frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD},$

$CD^2 = DB \times AD, AD = \frac{CD^2}{DB}, AD = \frac{12^2}{5} + 5 = \frac{169}{5}$ см.

3) ΔABC – прямоугольный, $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$

$AC = \sqrt{(\frac{169}{5})^2 - 13^2} = 31{,}2$ см.

Ответ: 5см, 31,2см.

Задача 3. Две окружности A, r и B, R касаются внутренним образом в точке $E.$ В произвольной точке C внутренней окружности проведена к ней касательная, отрезок DK которой, заключенный внутри внешней окружности, делится этой точкой на два отрезка DC и CK. Докажите, что оба эти отрезка видны из точки E касания окружностей под равными углами.

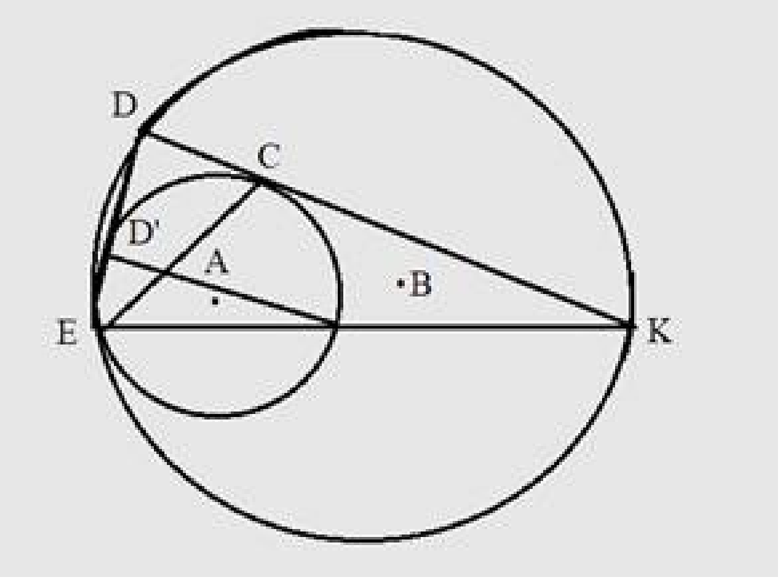

Рисунок 5. Иллюстрация к задаче 3

Доказательство. Заданные окружности на плоскости определяют две гомотетии. Рассмотрим гомотетию с центром в точке E и парой соответствующих точек B и A. При этой гомотетии вторая окружность перейдёт в первую, прямые ED и KE отображаются в себя, а точка D и K соответствуют точки D' и K' на первой окружности. Гомотетичные прямые DK и $D'K'$ параллельные между собой. Но если касательная параллельна к хорде, то она делит дугу, стягиваемую этой хордой, пополам. Отсюда следует, что угол CEK и KAB равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

Список литературы:

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. 1. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.

2. Валаханович Т.В. Геометрия. 8 класс: самостоятельные и контрольные работы: пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Т.В. Валаханович, В.В. Шлыков. – Минск: Аверсэв, 2017. – 125 с.

3. Шлыков В.В. Геометрия: учеб. пособие для 8-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. Обучения / В.В. Шлыков. – 3-е изд., перераб. – Минск: Нар. асвета, 2011. – 166 с.

4. Михайлова П.Н., Шабаева А.Ф., Кульсарина Н.А. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия в задачах. Практические занятия. Ч.1: Учеб. пособия – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГу, 2014. – 224 с.