

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИНИТНО-ВРЕМЕННОГО АДАПТИВНОГО МЕТОДА ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ**Кондратьева Ольга Сергеевна**

магистрант Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, РФ, г. Санкт-Петербург

Иванов Юрий Павлович

канд. техн. наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, РФ, г. Санкт-Петербург

В настоящее время повышение уровня безопасности полёта летательного аппарата является актуальной задачей. Для этого используются различные математические алгоритмы, в том числе и прогнозирующие, которые помимо авиации используются в различных областях.

В статье рассматриваются оптимальные алгоритмы дискретной фильтрации и прогноза навигационных параметров на примере оценки высоты полета летательного аппарата. Алгоритмы фильтрации и прогноза высоты полета летательного аппарата основываются на использовании финитно-временного метода оценки сигналов [1] и фильтрации Калмана в адаптивном и неадаптивном режимах работы. В качестве критериев оценки качества используются дисперсии ошибки оценки. В исследуемой системе для оценки навигационной координаты используется радиотехнический высотомер.

В работе рассматривается линейная модель измерения с аддитивной погрешностью.

Моделями измеряемого сигнала X_i и погрешности H_i измерителя являются нормальные стационарные эргодические процессы некоррелированные между собой. На входе фильтра результат измерения определяется соотношением:

$$Y_i = X_i + H_i,$$

где $i = 1...N$, N – объём используемой выборки для прогноза сигналов, Y_i, X_i, H_i – соответственно скалярные результаты измерения, полезного сигнала и погрешности измерения.

Как известно [1], использование финитно-временной обработки для фильтрации и прогнозирования сигналов значительно упрощает алгоритмы обработки сигналов. При этом позволяет применять единые алгоритмы обработки как в случае наличия коррелированных, так и некоррелированных погрешностей измерения, обеспечивает более устойчивую работу, повышает устойчивость работы алгоритмов относительно фильтрации Калмана.

Алгоритм прогнозирования сигналов на основе финитно-временного фильтра базируется на следствии теоремы ортогонального проецирования Пугачева [3] и в случае некоррелированности сигнала и помехи определяется следующей матрицей преобразования наблюдаемого сигнала:

$$A^* = K_{X_{\text{пр}}} (i \cdot d + pr \cdot d) \cdot K_Y (i \cdot d)^{-1},$$

где A^* – оптимальная по критерию среднего квадрата ошибки оценки матрица, $K_{X_{\text{пр}}}$ – матрица корреляционных моментов полезного сигнала, K_Y – матрица корреляционных моментов результата измерения, d – дискрет. Размерности рассматриваемых матриц $r \times r$, где r – память финитно-временного фильтра, pr – время прогноза сигнала на скользящем интервале времени.

Матрица корреляционных моментов измерений размерностью $r \times r$ равна:

$$K_Y = K_X + K_H.$$

Измеряемый сигнал Y_i в случае дискретной обработки образуется в виде следующего вектора Y_{1i} размерностью $r \times 1$ за счет использования предыдущих результатов измерений к моменту времени i :

$$Y_{1i} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_{i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{i-r+1} \end{bmatrix},$$

Оптимальная оценка прогноза сигнала определена по формуле:

$$\hat{X}_{\text{пр}_i}^* = A^* \cdot Y_{1i}.$$

В случае если интервал времени прогноза сигнала $pr = 0$, то $\hat{X}_{\text{пр}_i}^*$ будет являться оценкой фильтрации сигнала в момент времени i .

Оценка точности фильтрации и прогноза на выбранный интервал времени для произвольного вида оценок финитно-временного метода прогнозирования равна:

$$D_{E_{pr}} = K_{\hat{X}}^* - K_X \cdot A^{*T} - A^* \cdot K_X^T + K_X,$$

где $K_{\hat{X}}^*$ – матрица корреляционных моментов оптимальных оценок, определяемая следующим выражением:

$$K_{\hat{X}}^* = A^* \cdot K_Y \cdot A^*.$$

Оптимальная оценка точности фильтрации и прогноза после окончания переходного процесса также можно представить в следующем виде:

$$D_{E_{opt}}^* = K_X - K_{\hat{X}}^*.$$

Статистическая оценка математического ожидания ошибки оценки определяется по формуле [4]:

$$M_{E_i} = M_{E_{i-1}} + \frac{1}{i-1} \cdot (E_i^* - M_{E_{i-1}}),$$

где $E_i^* = \hat{X}_i^* - X_i$ – ошибка оптимальной оценки.

Статистическая оценка дисперсии ошибки оптимальной оценки $D_{E_i}^*$ фильтрации и прогноза в случае наблюдаемых стационарных процессов вычисляется по следующему выражению:

$$D_{E_i}^* = D_{E_{i-1}}^* + \frac{1}{i-1} \cdot ((E_i^* - M_{E_i})^2 - D_{E_{i-1}}^*).$$

Статистическая дисперсия $D_{E_i}^*$ после окончания переходного процесса совпадает с теоретическими дисперсиями. Оценку времени адаптации финитно-временного алгоритма

можно получить путем сравнения значений дисперсий $D_{E_{pr}}$ и $D_{E_{opt}}^*$ при выбранном значении их разности.

Прогноз в случае априорной неопределенности матриц корреляционных моментов полезного

сигнала K_X и погрешности K_H основывается на использовании байесова адаптивного метода оценки неизвестных матриц фильтрации и прогноза сигнала по результатам полученных измерений [6]. Для этой цели осуществляется статистическая оценка

неизвестной корреляционной матрицы результатов измерений K_{AY} в соответствии с формулой:

$$K_{AY_i} = K_{AY_{i-1}} + \frac{1}{i-1} \cdot ((Y_{1i} - M_{A_i}) \cdot (Y_{1i} - M_{A_i})^T - K_{AY_{i-1}}),$$

где M_A – адаптивная оценка математического ожидания размерностью $r \times 1$, вычисленная по формуле:

$$M_{AY_i} = M_{AY_{i-1}} + \frac{1}{i-1} \cdot (Y_{1i} - M_{AY_{i-1}}).$$

В случае априорной неопределенности относительно корреляционной матрицы K_X и некоррелированности сигнала и помехи её оценка осуществляется в соответствии со следующей формулой:

$$K_{AX} = K_{AY} - K_H.$$

В данном случае адаптивная оптимальная матрица оценки сигнала прогноза A_A^* вычислена по формуле:

$$A_A^* = K_{AX}(i \cdot d + r \cdot d) \cdot K_{AY}(i \cdot d)^{-1}.$$

В случае априорной неопределенности относительно корреляционной матрицы K_H и некоррелированности сигнала и помехи её оценка осуществляется в соответствии со следующей формулой:

$$K_{AH} = K_{AY} - K_X.$$

В данном случае адаптивная оптимальная матрица оценки сигнала прогноза A_A^* вычислена по формуле:

$$A_A^* = K_{AH}(i \cdot d + pr \cdot d) \cdot K_{AY}(i \cdot d)^{-1}.$$

Полученные статистические оценки указанных матриц

K_{AX}, K_{AH} позволяют использовать приведенный выше алгоритм.

В случае если интервал времени прогноза сигнала $pr = 0$, то адаптивная оценка сигнала будет являться оценкой фильтрации сигнала.

Определение оптимальной оценки дискретного фильтра Калмана [5] осуществляется на основании теоремы Дуба [3], где оптимальный прогноз определяется условным математическим ожиданием:

$$\hat{X}^*(t+T) = M[X(t+T)/Y(t)],$$

где $\hat{X}^*$ – оптимальная оценка сигнала, X, Y – соответственно оцениваемый и наблюдаемый сигналы.

В качестве корреляционной характеристики оцениваемого сигнала выбирается следующая функция:

$$K_{X_{i,j}} = \sigma^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |i-j| \cdot d},$$

где $i, j = 1 \dots N$, σ – среднеквадратическое отклонение от требуемого значения высоты полета, α – параметр корреляционной функции, d – дискрет.

Как известно, случайный нормальный процесс с данной корреляционной функцией является марковским процессом [2].

Моделью погрешности радиотехнического высотомера является белый шум, корреляционная функция которого определяется выражением:

$$K_{H_{i,j}} = \sigma_H^2 \cdot \delta_{i,j},$$

где $i, j = 1 \dots N$, σ_H – среднеквадратическое отклонение белого шума, $\delta_{i,j}$ – дельта-функция.

Анализ рассматриваемых алгоритмов фильтрации и прогноза сигнала в случае полной априорной неопределенности и адаптивной оценки матрицы корреляционных моментов полезного сигнала осуществлен в процессе моделирования при следующих исходных данных:

- объем выборки $N = 5000$;

- среднеквадратическое отклонение полезного сигнала $\sigma = 20$ м;

- среднеквадратическое отклонение погрешности радиовысотомера $\sigma_H = 5$ м;

- память финитно-временной обработки $r = 5$;

- интервал времени прогноза сигнала $pr = 20$;

- параметр корреляционной функции α = от 0,01 1/с:

- дискрет $d = 5$ с. Как известно, по теореме Котельникова дискрет не должен превышать значения:

$$d < \frac{\pi}{\alpha \cdot \tan(\frac{\pi}{2} - 0,05 \cdot \frac{\pi}{2})}.$$

Сравнительные результаты моделирования для исследуемых алгоритмах приведены на следующих графиках:

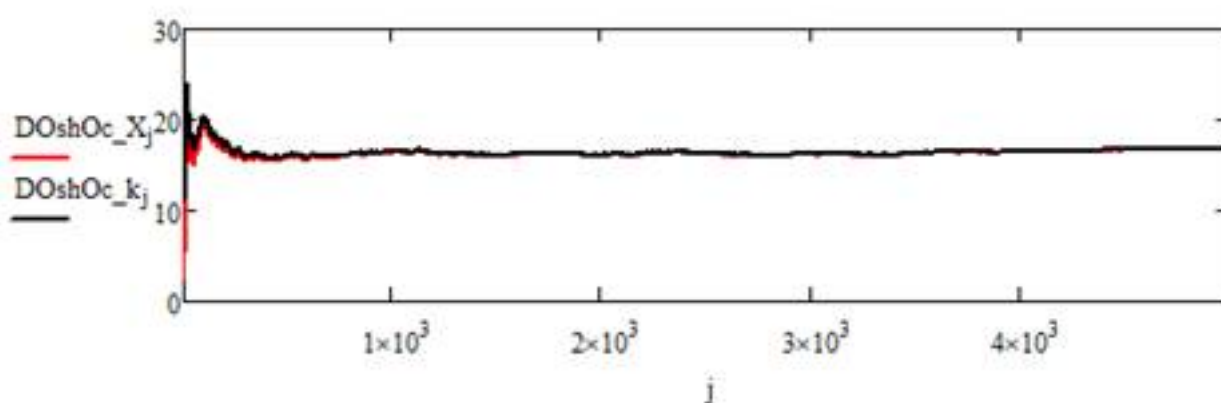


Рисунок 1. Изменение дисперсии ошибок оценок финитно-временной фильтрации на текущем интервале времени $r \cdot d$ ($DOshOc_X$) и фильтра Калмана ($DOshOc_k$) от дискретного времени i

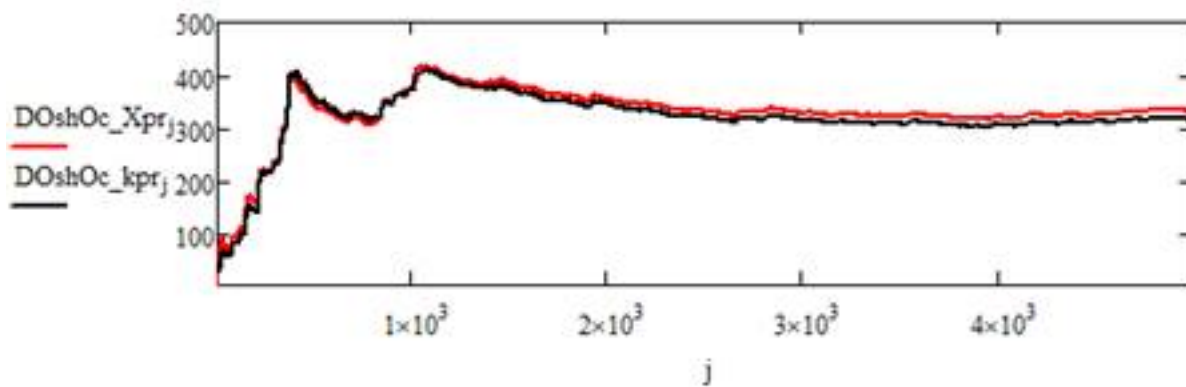


Рисунок 2. Изменение дисперсии ошибок оценок финитно-временного прогноза на текущем интервале времени $r-d$ ($DOshOc_Xpr_j$) и прогноза фильтра Калмана ($DOshOc_kpr_j$) от дискретного времени i

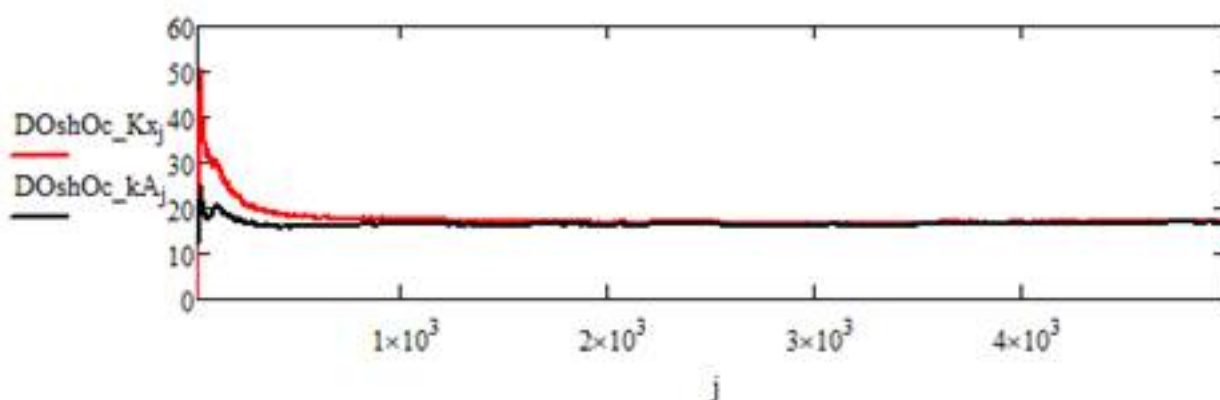


Рисунок 3. Изменение дисперсии ошибок оценок адаптивной финитно-временной фильтрации на текущем интервале времени $r-d$ ($DOshOc_Kx_j$) и адаптивного прогноза фильтра Калмана ($DOshOc_kA_j$) от дискретного времени i

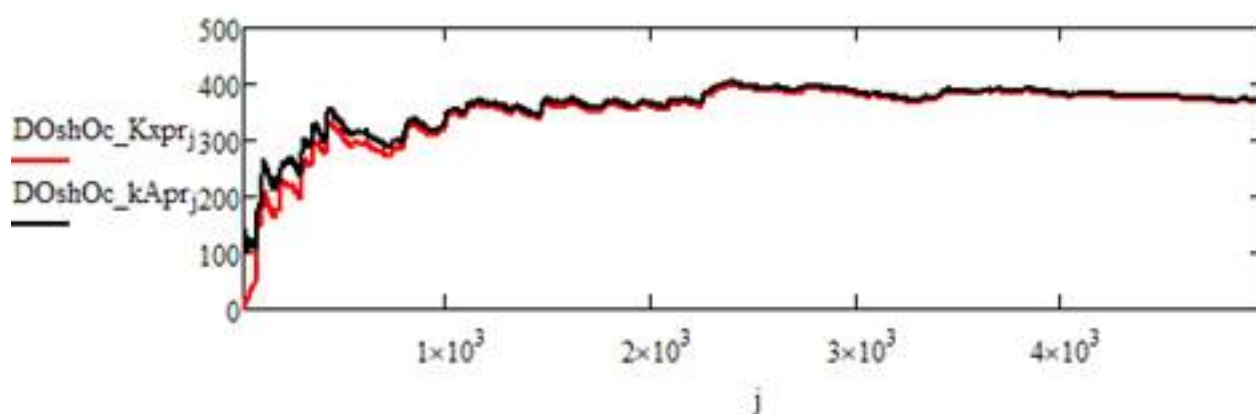


Рисунок 4 . Изменение дисперсии ошибок оценок адаптивного финитно-временного прогноза на текущем интервале времени $r-d$ ($DOshOc_Kxpr_j$) и адаптивного прогноза фильтра Калмана ($DOshOc_kApr_j$) от дискретного времени i

Как видно из приведенных рисунков, финитно-временная обработка незначительно уступает

по точности методу Калмана при выбранных исходных данных. При увеличении памяти финитно-временного алгоритма его точность прогноза будет приближаться к фильтрации Калмана. При этом адаптивная финитно-временная обработка по точности превосходит адаптивный прогноз Калмана.

По результатам проведенного моделирования была сделана сравнительная оценка методов обработки на робастность и помехозащищенность исследуемых алгоритмов. Диапазоны изменения данных: $r = 2 \dots 4$, $\sigma = 4 \dots 40$.

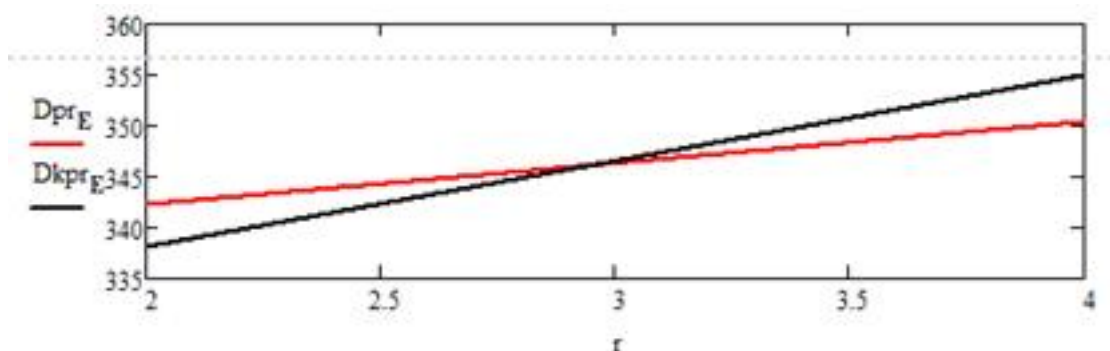


Рисунок 5. Изменение дисперсии ошибки оценки финитно-временного прогноза (Dpr_E) и прогноза фильтра Калмана ($Dkpr_E$) от изменения параметра r

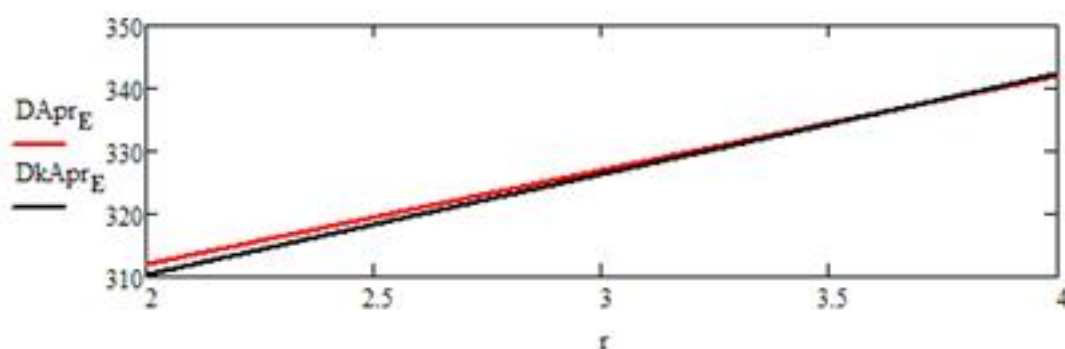


Рисунок 6. Изменение дисперсии ошибки оценки адаптивного финитно-временного прогноза ($DApr_E$) и адаптивного прогноза фильтра Калмана ($DkApr_E$) от изменения параметра r

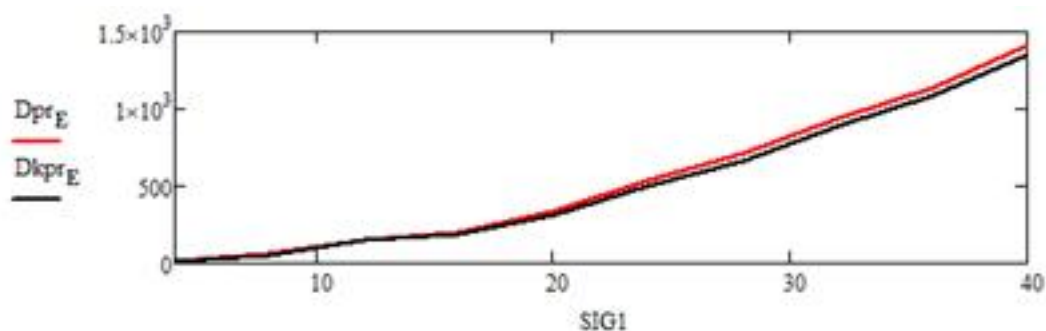


Рисунок 7. Изменение дисперсии ошибки оценки финитно-временного прогноза (D_{prE}) и прогноза фильтра Калмана (D_{kprE}) от изменения параметра SIG1

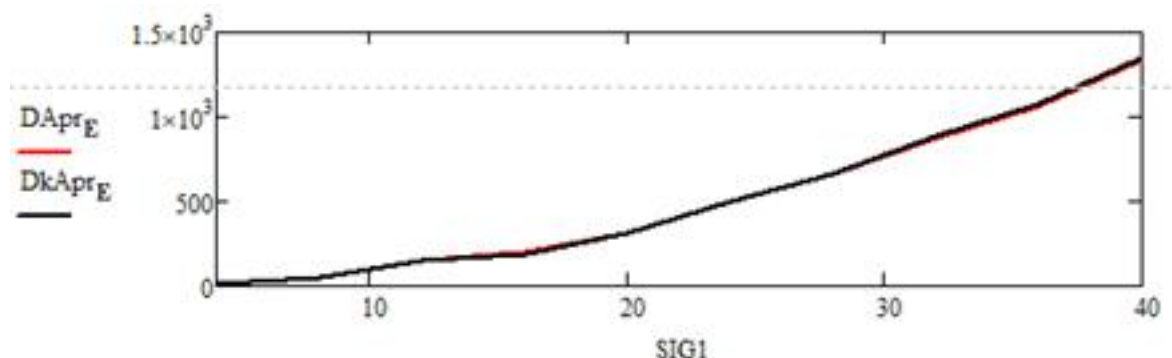


Рисунок 8. Изменение дисперсии ошибки оценки адаптивного финитно-временного прогноза (DA_{prE}) и адаптивного прогноза фильтра Калмана (DkA_{prE}) от изменения параметра SIG1

В результате проделанной работы было показано, что финитно-временная обработка при фильтрации и прогнозирования сигналов незначительно уступает по точности методу Калмана при выбранной памяти, но имеет более простой математический аппарат. Данные алгоритмы по свойствам робастности и помехозащищенности практически не отличаются друг от друга. При увеличении памяти финитно-временная обработка асимптотически стремится по точности к фильтрации Калмана, как в адаптивном режиме, так и при полной априорной неопределенности. Финитно-временная обработка является более универсальной по сравнению с фильтром Калмана.

Список литературы:

1. Иванов, Ю.П. Финитно-временной метод оптимальной фильтрации дискретных сигналов [Текст]/ Ю.П. Иванов. – Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2018. – №5. – с. 23 – 27.
2. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем [Текст]/ В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
3. Иванов, Ю.П. Информационно-статистическая теория измерений [Текст]/ Ю.П. Иванов, В.Г. Никитин. – СПб: ГУАП, 2011. 104 с.
4. Репин, В.Г. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем [Текст]/ В.Г. Репин, Г.П. Тартаковский. – М, «Советское радио», 1977. 432 с.
5. Медич, Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление [Текст]/ Дж. Медич. – М., «Энергия», 1973. 440 с.
6. Тартаковский, Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем / В.Г. Рабепин, Г.П Тартаковский; М: Советское радио, 1977. – 432 с.