ОБ N-КРАТНО Ω-РАССЛОЕННЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Саакян Ангелина Саркисовна

магистрант Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского, РФ, г. Брянск

ON n-MULTIPLE Ω-FOLIATED FITTING CLASSES OF FINITE GROUPS

Angelina Saakyan

Postgraduate student, Bryansk state university, Russia, Bryansk

Аннотация. В работе рассматриваются только конечные группы. Изучаются Ω-расслоенные классы Фиттинга конечных групп. Используются методы теории классов групп. Установлена n-кратная Ω-расслоенность некоторых классов Фиттинга конечных групп.

Abstract. In the paper only finite groups are considered. We study Ω-foliated Fitting classes of finite groups. We use methods of the theory of classes of groups. We established n-multiple Ω-foliation of some Fitting classes of finite groups.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, класс Фиттинга, Ω-расслоенный класс Фиттинга, n-кратно Ω-расслоенный класс Фиттинга.

Keywords: a finite group, a class of groups, a Fitting class, an Ω-foliated Fitting class, n-multiple Ω-foliated Fitting class.

В теории классов конечных групп центральное место занимают классы, называемые классами Фиттинга [1]. При исследовании классов Фиттинга эффективными являются функциональные методы. Так, с помощью специальных функций, которые называются спутниками (см., например, [2]), были построены такие классы Фиттинга, как локальные и ω-локальные, композиционные и Ω-композиционные классы Фиттинга. В 1999 году В.А. Ведерников, используя функциональный подход, построил Ω-расслоенные классы Фиттинга, обобщающие упомянутые выше Ω-композиционные классы Фиттинга (см. [3, 4]). В частности, Ω-композиционные классы Фиттинга представляют один из видов Ω-расслоенных классов Фиттинга конечных групп. Исследованию Ω-расслоенных классов Фиттинга посвящены работы О.В. Камозиной, В.Е. Егоровой, Е.Н. Бажановой и других (см., например, [5 – 7]). Целью настоящей работы является установление n-кратной Ω-расслоенности некоторых классов Фиттинга конечных групп.

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются классические методы теории групп и теории классов групп. Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [1, 8]). Приведем лишь некоторые из них.

Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные; класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняются следующие два условия:

1) если $G\in\mathfrak{F}$ и $N\triangleleft G$, то $N\in\mathfrak{F}$;

2) если $G=N_1N_2$ и $N_1,N_2\in\mathfrak{F}$, $N_1\triangleleft G$, $N_2\triangleleft G$, то $G\in\mathfrak{F}$ [1].

Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$ [1].

В дальнейшем, $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Пусть $\mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп, $\mathfrak{I}$ – класс всех простых конечных групп, Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{A}$ – класс всех конечных абелевых групп, $\mathfrak{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп, $p \in \mathbb{P}, \emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathfrak{F}_p$ и $\mathfrak{F}_\pi$ – соответственно классы всех p -групп и π -групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – классы групп, то $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ $=(G \in \mathfrak{E} \mid$ существует $N \lhd G$, где $N \in \mathfrak{F}_1$, $G/N \in \mathfrak{F}_2$). Через φ_3 обозначается направление Ω -композиционного класса Фиттинга, то есть $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{S}_{cA}$ – класс всех групп, у которых каждый главный A -фактор централен [4]. Если $K(G) \subseteq \Omega$, то группа G называется Ω *-группой*; $\mathfrak{E}_\Omega$ – класс всех Ω -групп; $O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\Omega}$, $O^\Omega(G) = G^{\mathfrak{E}_\Omega}$ [3]. Через $\mathfrak{E}_{c\Omega}$ обозначим класс всех групп, у которых каждый главный Ω -фактор централен; через $\mathfrak{E}_{c\Omega'}$ – класс всех групп, у которых каждый главный абелев Ω' -фактор централен.

Функции $f : \Omega \cup \{\Omega\} \rightarrow$ {классы Фиттинга групп} и $h : \mathfrak{I} \rightarrow$ {классы Фиттинга групп}, $\varphi : \mathfrak{I} \rightarrow$ {непустые формации Фиттинга}, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называются соответственно ΩR*-функцией*, R *-функцией* и FR*-функцией* [3]. Класс Фиттинга

$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid O^\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in K(G) \cap \Omega$)

называется Ω*-расслоенным классом Фиттинга* с ΩR*-спутником* f *и направлением* φ (*кратко,* $\Omega\varphi$*-расслоенным классом Фиттинга*) и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$ [3]. Класс Фиттинга $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{E} \mid G^{\varphi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in K(G)$) называется *расслоенным классом Фиттинга* с R *-спутником* h *и направлением* φ (*кратко,* φ*-расслоенным классом Фиттинга*) и обозначается $\mathfrak{H} = R(h, \varphi)$ [3].

Направление φ Ω-расслоенного класса Фиттинга называется b*-направлением*, если

$\mathfrak{E}_A\varphi(A)=\varphi(A)$ для любой абелевой группы $A\in\mathfrak{I}$; r*-направлением*, если $\varphi(A)=\varphi(A)\mathfrak{E}_{A'}$ для любой группы $A\in\mathfrak{I}$; направление φ Ω-расслоенного класса Фиттинга называется b_A*-направлением*, где $A\in\mathfrak{I}$, если $\varphi(A)=\mathfrak{E}_A\varphi(A)$ [4].

Следуя [9], всякий класс Фиттинга считают 0-*кратно* $\Omega\varphi$*-расслоенным*. Пусть $n\in\mathbb{N}.$ Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n*-кратно* Ω*-расслоенным классом Фиттинга с направлением* φ (n*-кратно* $\Omega\varphi$*-расслоенным*) если $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним $\Omega_{(n-1)}$-спутником, то есть таким Ω-спутником f, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными классами Фиттинга с направлением φ [4].

Теорема 1. *Пусть* $\varphi-$ *произвольная* FR *-функция. Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{E}_{\Omega'}$ *является* n*-кратно* $\Omega\varphi$*-расслоенным классом Фиттинга для любого* $n\in\mathbb{N}.$

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции по параметру *n*.

1. Установим справедливость утверждения при $n=1$. Действительно, по теореме 2.3 [10] $\mathfrak{E}_{\Omega'}$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ, то есть 1-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

2. Предположим, что при $n=k$ утверждение истинно, то есть предположим, что $\mathfrak{E}_{\Omega'}$ является k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

3. Докажем, что при $n=k+1$ утверждение также истинно. По теореме 2.3 [10] класс $\mathfrak{E}_{\Omega'}$ совпадает с классом Фиттинга $\mathfrak{F}$, который обладает ΩR-спутником f, имеющим следующее строение: $f(\Omega')=\mathfrak{E}_{\Omega'}$ и для любого $A\in\Omega$ выполняется $f(A)=\varnothing.$ Учитывая, что $\mathfrak{E}_{\Omega'}-k$-кратно $\Omega\varphi$-расслоенный класс Фиттинга по предположению индукции, получаем, что все непустые значения ΩR-спутника f класса $\mathfrak{F}=\mathfrak{E}_{\Omega'}$ являются k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенными классами Фиттинга. Таким образом, $\mathfrak{F}=\mathfrak{E}_{\Omega'}-(k+1)$-кратный $\Omega\varphi$-расслоенный класс Фиттинга. Из 1 — 3 по методу математической индукции следует, что утверждение

верно для любого $n \in \mathbb{N}.$ Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi -$ *произвольная* FR *-функция. Тогда класс Фиттинга* (1) *всех единичных групп является* n *-кратно* $\Omega\varphi$ *-расслоенным классом Фиттинга для любого* $n \in \mathbb{N}.$

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции по параметру *n*.

1. Установим справедливость утверждения при $n=1$. Действительно, по теореме 2.1 [10] (1) является Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением $\varphi,$ то есть 1-кратно $\Omega\varphi$ -расслоенным классом Фиттинга.

2. Предположим, что при $n=k$ утверждение истинно, то есть предположим, что (1) является k -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенным классом Фиттинга.

3. Докажем, что при $n=k+1$ утверждение также истинно. По теореме 2.1 [10] класс (1) совпадает с классом Фиттинга $\mathfrak{F},$ который обладает ΩR -спутником $f,$ имеющим следующее строение: $f(\Omega')=$ (1) и для любого $A \in \Omega$ выполняется $f(A)=\varnothing.$ Учитывая, что (1) $-$ k -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенный класс Фиттинга по предположению индукции, получаем, что все непустые значения ΩR -спутника f класса $\mathfrak{F}=$ (1) являются k -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенными классами Фиттинга. Таким образом, $\mathfrak{F}=$ (1) $-$ $(k+1)$ -кратный $\Omega\varphi$ -расслоенный класс Фиттинга. Из 1 $-$ 3 по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}.$ Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $p \in \mathbb{P},$ φ – b_{Z_p} *- направление* Ω *-расслоенного класса Фиттинга. Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{N}_p$ *является* n *-кратно* $\Omega\varphi$ *-расслоенным классом Фиттинга для любого* $n \in \mathbb{N}.$

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции по параметру *n*.

1. Установим справедливость утверждения при $n=1$. Действительно, по теореме 2.4 [10] $\mathfrak{N}_p$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с b_{Z_p} -направлением φ , то есть

1-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

2. Предположим, что при $n = k$ утверждение истинно, то есть предположим, что $\mathfrak{N}_p$ является k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

3. Докажем, что при $n = k + 1$ утверждение также истинно. По теореме 2.4 [10] класс $\mathfrak{N}_p$ совпадает с классом Фиттинга $\mathfrak{F}$, который обладает ΩR-спутником f, имеющим следующее строение: $f(\Omega') = \mathfrak{N}_p$ и для любого $A \in \Omega$ выполняется $f(A) = (1)$, если $A \cong Z_p$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus (Z_p)$. Учитывая тот факт, что по теореме 2 класс (1) всех единичных групп – k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенный класс Фиттинга, а также ввиду предположения индукции, получаем, что все непустые значения ΩR-спутника f класса $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ являются k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенными классами Фиттинга. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ – $(k+1)$-кратный $\Omega\varphi$-расслоенный класс Фиттинга. Из 1 – 3 по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

<u>Теорема 4.</u> *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, φ – *произвольная* FR*-функция. Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{E}_\pi$ *является* n*-кратно* $\Omega\varphi$*-расслоенным классом Фиттинга для любого* $n \in \mathbb{N}$.

<u>Доказательство.</u> Докажем теорему методом математической индукции по параметру *n*.

1. Установим справедливость утверждения при $n = 1$. Действительно, по теореме 2.5 [10] $\mathfrak{E}_\pi$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ, то есть 1-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

2. Предположим, что при $n = k$ утверждение истинно, то есть предположим, что $\mathfrak{E}_\pi$ является k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

3. Докажем, что при $n = k+1$ утверждение также истинно. По теореме 2.5 [10] класс $\mathfrak{E}_{\pi}$ совпадает с классом Фиттинга $\mathfrak{F}$, который обладает ΩR-спутником f, имеющим следующее строение: $f(\Omega') = \mathfrak{E}_{\pi}$ и для любого $A \in \Omega$ выполняется $f(A) = \mathfrak{E}_{\pi}$, если $A \in \Omega_{\pi}$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus \Omega_{\pi}$, где $\Omega_{\pi} = (A \in \Omega \mid \pi(A) \subseteq \pi)$. По предположению индукции, получаем, что все непустые значения ΩR-спутника f класса $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi}$ являются k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенными классами Фиттинга. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi}$ — $(k+1)$-кратный $\Omega\varphi$-расслоенный класс Фиттинга.

Из 1 — 3 по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

<u>Теорема 5.</u> *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, φ – br*-направление* Ω*-расслоенного класса Фиттинга, удовлетворяющее условию* $\bigcap_{A \in \Omega} \varphi(A) \subseteq \mathfrak{E}_{c\Omega} \cap \mathfrak{E}_{c\Omega'}$*) Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{N}_{\pi}$ *является* n*-кратно* $\Omega\varphi$*-расслоенным классом Фиттинга для любого* $n \in \mathbb{N}$.

<u>Доказательство.</u> Докажем теорему методом математической индукции по параметру *n*.

1. Установим справедливость утверждения при $n = 1$. Действительно, по теореме 4 [11] $\mathfrak{N}_{\pi}$ является Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ, то есть 1-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

2. Предположим, что при $n = k$ утверждение истинно, то есть предположим, что $\mathfrak{N}_{\pi}$ является k-кратно $\Omega\varphi$-расслоенным классом Фиттинга.

3. Докажем, что при $n = k+1$ утверждение также истинно. По теореме 4 [11] класс $\mathfrak{N}_{p}$ совпадает с классом Фиттинга $\mathfrak{F}$, который обладает ΩR-спутником f, имеющим следующее строение: $f(\Omega') = \mathfrak{N}_{\pi}$ и для любого $A \in \Omega$ выполняется $f(A) = (1)$, если $A \in \Omega_{\pi}$, $f(A) = \varnothing$, если

$A \in \Omega \setminus \Omega_{\pi}$. Поскольку учитывая, что, согласно теореме 2, (1) – k -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенный класс Фиттинга, а также учитывая предположение индукции, получаем, что все непустые значения ΩR -спутника f класса $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi}$ являются k -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенными классами Фиттинга. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi}$ – $(k+1)$ -кратный $\Omega\varphi$ -расслоенный класс Фиттинга. Из 1 – 3 по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Список литературы:

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.

2. Воробьев Н.Н. Алгебра классов конечных групп. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

3. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика, 2001. Т. 13, № 3. – С. 125–144.

4. Ведерников В.А. Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга // Труды ИММ УрО РАН, 2001. Т. 7, № 2. – С. 55–71.

5. Егорова В.Е. Критические неоднопорождённые тотально канонические классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки, 2008. Т. 83, № 4. – С. 520–527.

6. Камозина О.В. Минимальный спутник *τ* -замкнутого *n* -кратно Ω-расслоенного класса Фиттинга // Bulletin of the South Ural State University Series “Mathematics. Mechanics. Physics”, 2018. V. 10, № 2. – С. 22–27.

7. Бажанова Е.Н., Ведерников В.А. Ω-расслоенные классы Фиттинга *T*-групп // Сиб. электрон. матем. изв, 2017. Т.14. – С. 629–639.

8. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

9. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Минск: Беларуская навука, 1997.

10. Горепекина А.А., Максаков С.П., Саакян А.С. Описание Ω-спутников Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга конечных групп // Молодой ученый, 2019. № 13 (251). – С. 1–5.

11. Саакян А.С. Об Ω-расслоенных классах Фиттинга конечных групп // Лучшая студенческая статья 2019: Сборник трудов конференции. – Пенза: Издательство «Наука и Просвещение», 2019. – С. 18–23.