

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ ПО ТЕОРИИ МАРКОВИЦА

Афанасьева Алёна Андреевна

магистрант, Институт математики и информатики, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, РФ г. Якутск

Аннотация. В данной работе сформирован оптимальный портфель ценных бумаг по теории Марковица на примере российского фондового рынка. Портфель состоит из акций четырех российских компаний ПАО «Якутскэнерго», ПАО «ЯТЭК», ОАО «Ростелеком» и ОАО «Лукойл».

Ключевые слова: оптимальный портфель, теория Марковица, доходность, риск, инвестиционный портфель.

Принимая решение об инвестировании в начальный момент времени, инвестор может оценить ожидаемую доходность каждой ценной бумаги и выбрать ценную бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Однако рациональный инвестор помимо ожидаемой доходности должен оценить и риск, связанный с вложением в данный вид ценных бумаг. Таким образом, задача рационального инвестора заключается в поиске компромисса между доходностью и риском. Новый подход к диверсификации портфеля был предложен Гарри Марковицем, (Марковицом) основателем современной теории портфеля.

По мнению Марковича, инвестор должен принимать решение, по выбору портфеля исходя исключительно из показателей ожидаемой доходности и стандартного отклонения доходности [2, с. 151].

С помощью метода, предложенного Г. Марковицем, можно сформировать большое количество портфелей ценных бумаг, часть из которых будет относиться к эффективному множеству. Для выделения оптимальных портфелей Марковиц использовал алгоритм квадратического программирования (метод критических линий) [1, с. 216-217].

Экономико-математическая модель задачи формирования оптимального портфеля акций максимальной эффективности при учете всех ограничений на портфель примет следующий вид [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N m_i x_i \rightarrow \max \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j} \leq \sigma_p \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Обратная задача оптимизации портфеля сводится к выбору такой структуры портфеля, доходность которого выше либо равна заданному значению, а риск минимален. Экономико-математическая модель задачи в этом случае имеет вид [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N x_i x_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^N m_i x_i \geq m_p \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Все данные для расчета были взяты из сайта <https://ru.investing.com>.

Для исследования возьмем акции 7 российских компаний из разных отраслей, тем самым обеспечивая репрезентативность выборки: ПАО «Сбербанк» (SBER); ОАО «Аэрофлот» (AFLT); ПАО «ЯТЭК» (YAKG); ПАО «Газпром» (GAZP); ПАО «Якутскэнерго» (YKEN); ОАО «Ростелеком» (RTKM); ОАО «ЛУКОЙЛ» (LKOH).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Дата	Сбербанк	Аэрофлот	ЯТЭК	Газпром	Якутскэнерго	Ростелеком	ЛУКОЙЛ
2	01.06.2019	238,55	101,76	8,26	232,83	0,2895	81,15	5305
3	01.07.2019	233,49	106,94	8,76	236,9	0,28	82,46	5226,5
4	01.08.2019	224,2	109,74	8,64	232,15	0,278	81,01	5379,5
5	01.09.2019	227,71	103,18	26,23	225,9	0,323	78,5	5387,5
6	01.10.2019	234,89	106,9	21,32	260	0,29	78,5	5919,5
7	01.11.2019	233,98	102,84	19,1	257,54	0,299	80,5	6137,5
8	01.12.2019	254,75	103,5	31,02	256,4	0,2795	78,36	6169
9	01.01.2020	252,2	107,4	57,8	226,7	0,321	88	6550,5
10	01.02.2020	233,36	92,94	49,24	202,65	0,379	86,68	5699,5
11	01.03.2020	187,21	68,38	52,9	181,41	0,305	74	4715
12	01.04.2020	197,25	75,76	43,46	190	0,343	82,1	4826,5
13	01.05.2020	200,5	78,06	40,1	199,95	0,3505	82,92	5242,5
14	01.06.2020	206,43	84,34	40,3	200,1	0,3695	85,05	5418,5

Рис 2.8. Ежемесячная стоимость акций SBER, AFLT, YAKG, GAZP, YKEN, RTKM, LKOH период с 01.06.2019 по 01.06.2020

На следующем этапе формирования портфеля необходимо рассчитать ежемесячные доходности по каждой акции в %:

Доходность Сбербанк $= (B3-B2)/B2*100$; $= (B4-B3)/B3*100$ и т.д.

Доходность Аэрофлот $= (C3-C2)/C2*100$; $= (C4-C3)/C3*100$ и т.д. Так рассчитываем для всех компаний.

	A	I	J	K	L	M	N	O
1	Дата	Доходность Сбербанк	Доходность Аэрофлот	Доходность ЯТЭК	Доходность Газпром	Доходность Якутскэнерго	Доходность Ростелеком	Доходность ЛУКОЙЛ
2	01.06.2019							
3	01.07.2019	-2,121148606	5,090408805	6,053268765	1,748056522	-3,281519862	1,614294516	-1,4797361
4	01.08.2019	-3,97875712	2,61829063	-1,36986301	-2,00506543	-0,714285714	-1,75842833	2,92738927
5	01.09.2019	1,565566459	-5,97776563	203,587963	-2,69222485	16,18705036	-3,09838292	0,14871271
6	01.10.2019	3,153133371	3,605349874	-18,719024	15,09517486	-10,21671827	0	9,87470998
7	01.11.2019	-0,387415386	-3,797942	-10,412758	-0,94615385	3,103448276	2,547770701	3,68274347
8	01.12.2019	8,876827079	0,641773629	62,40837696	-0,44264969	-6,52173913	-2,65838509	0,51323829
9	01.01.2020	-1,000981354	3,768115942	86,3313991	-11,5834633	14,84794275	12,302195	6,18414654
10	01.02.2020	-7,470261697	-13,4636872	-14,8096886	-10,608734	18,06853583	-1,5	-12,9913747
11	01.03.2020	-19,77631128	-26,425651	7,432981316	-10,4811251	-19,52506596	-14,6285187	-17,273445
12	01.04.2020	5,36296138	10,79262942	-17,8449905	4,735130368	12,45901639	10,94594595	2,36479321
13	01.05.2020	1,64765526	3,035902851	-7,73124712	5,236842105	2,186588921	0,998781973	8,61908215
14	01.06.2020	2,957605985	8,045093518	0,498753117	0,075018755	5,420827389	2,568740955	3,35717692

Рисунок 2.9. Расчет доходности акций SBER, AFLT, YAKG, GAZP, YKEN, RTKM, LKOH

Следующим шагом является определение математического ожидания доходностей акций для всех компаний. Чтобы определить данное значение находим среднеарифметическое значение за весь исследуемый период. Ожидаемая доходность по каждой акции будет следующая:

Ожидаемая доходность Сбербанк $= \text{CPЗНАЧ}(I3:I14)$

Ожидаемая доходность Аэрофлот $= \text{CPЗНАЧ}(J3:J14)$ и т.д.

	A	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Дата	ЛУКОЙЛ	Доходность Сбербанк	Доходность Аэрофлот	Доходность ЯТЭК	Доходность Газпром	Доходность Якутскэнерго	Доходность Ростелеком	Доходность ЛУКОЙЛ
2	01.06.2019	5305							
3	01.07.2019	5226,5	-2,121148606	5,090408805	6,053268765	1,748056522	-3,281519862	1,614294516	-1,4797361
4	01.08.2019	5379,5	-3,97875712	2,61829063	-1,36986301	-2,00506543	-0,714285714	-1,75842833	2,92738927
5	01.09.2019	5387,5	1,565566459	-5,97776563	203,587963	-2,69222485	16,18705036	-3,09838292	0,14871271
6	01.10.2019	5919,5	3,153133371	3,605349874	-18,719024	15,09517486	-10,21671827	0	9,87470998
7	01.11.2019	6137,5	-0,387415386	-3,797942	-10,412758	-0,94615385	3,103448276	2,547770701	3,68274347
8	01.12.2019	6169	8,876827079	0,641773629	62,40837696	-0,44264969	-6,52173913	-2,65838509	0,51323829
9	01.01.2020	6550,5	-1,000981354	3,768115942	86,3313991	-11,5834633	14,84794275	12,302195	6,18414654
10	01.02.2020	5699,5	-7,470261697	-13,4636872	-14,8096886	-10,608734	18,06853583	-1,5	-12,9913747
11	01.03.2020	4715	-19,77631128	-26,425651	7,432981316	-10,4811251	-19,52506596	-14,6285187	-17,273445
12	01.04.2020	4826,5	5,36296138	10,79262942	-17,8449905	4,735130368	12,45901639	10,94594595	2,36479321
13	01.05.2020	5242,5	1,64765526	3,035902851	-7,73124712	5,236842105	2,186588921	0,998781973	8,61908215
14	01.06.2020	5418,5	2,957605985	8,045093518	0,498753117	0,075018755	5,420827389	2,568740955	3,35717692
15		Ожидаемая доходность (r)	-0,930927159	-1,00562342	24,61876425	-0,98909947	2,667840082	0,611167838	0,49395306

Рисунок 2.10. Расчет ожидаемой доходности акций SBER, AFLT, YAKG, GAZP, YKEN, RTKM, LKOH

Доходность акции ОАО «Сбербанк», «Аэрофлот» и «Газпром» имеет отрицательное ожидание доходности. Поэтому данные акции следует не включать в портфель.

Для определения риска акций рассчитаем среднеквадратическое отклонение ежемесячных доходностей акций:

Риск ЯТЭК = $\sqrt{\text{CPЗНАЧ}(P3:P14)}$ и так для всех компаний.

	A	H	K	M	N	O	P	Q	R	S
1	Дата	ЛУКОЙЛ	Доходность ЯТЭК	Доходность Якутскэнерго	Доходность Ростелеком	Доходность ЛУКОЙЛ	(mj-mi)^2 ЯТЭК	(mj-mi)^2 Якутскэнерго	(mj-mi)^2 Ростелеком	(mj-mi)^2 ЛУКОЙЛ
2	01.06.2019	5305								
3	01.07.2019	5226,5	6,053268765	-3,281519862	1,614294516	-1,4797361	344,67762	35,39488374	1,006263132	3,8954489
4	01.08.2019	5379,5	-1,36986301	-0,714285714	-1,75842833	2,92738927	675,40875	11,4387749	5,614985996	5,9216118
5	01.09.2019	5387,5	203,587963	16,18705036	-3,09838292	0,14871271	32029,974	182,7690465	13,7607668	0,1191909
6	01.10.2019	5919,5	-18,719024	-10,21671827	0	9,87470998	1878,1639	166,0118438	0,373526127	87,9986
7	01.11.2019	6137,5	-10,412758	3,103448276	2,547770701	3,68274347	1227,2075	0,189754499	3,750430646	10,168384
8	01.12.2019	6169	62,40837696	-6,52173913	-2,65838509	0,51323829	1428,0548	84,4483661	10,68997637	0,0003719
9	01.01.2020	6550,5	86,3313991	14,84794275	12,302195	6,18414654	3808,4493	148,3549011	136,680116	32,378302
10	01.02.2020	5699,5	-14,8096886	18,06853583	-1,5	-12,9913747	1554,6029	237,1814294	4,457029642	181,85406
11	01.03.2020	4715	7,432981316	-19,52506596	-14,6285187	-17,273445	295,35113	492,5250787	232,2480455	315,68044
12	01.04.2020	4826,5	-17,8449905	12,45901639	10,94594595	2,36479321	1803,1705	95,86713356	106,8076385	3,5000429
13	01.05.2020	5242,5	-7,73124712	2,186588921	0,998781973	8,61908215	1046,5232	0,23160268	0,150244717	66,017723
14	01.06.2020	5418,5	0,498753117	5,420827389	2,568740955	3,35717692	581,77494	7,578939115	3,832092507	8,1980509
15		Ожидаемая доходность (r)	24,61876425	2,667840082	0,611167838	0,49395306				
16		Риск акции (σ)	62,36542759	11,03778267	6,578824084	7,72297561				

Рисунок 2.11. Расчет риска акций SBER, AFLT, YAKG, GAZP, YKEN, RTKM, LKOH

У нас есть все необходимые данные для оценки долей акций в портфеле.

Для оценки уровня риска всего инвестиционного портфеля воспользуемся надстройкой в программе Excel. Для этого зайдём в Главное меню → «Данные» → «Анализ данных» → «Ковариация».

18	Ковариационная матрица зависимостей акций					
19		ЯТЭК	Якутскэнерго	Ростелеком	ЛУКОЙЛ	
20	ЯТЭК	3889,446558				
21	Якутскэнерго	239,4140693	121,8326462			
22	Ростелеком	-18,152193	45,42915125	43,28092633		
23	ЛУКОЙЛ	14,24583206	13,11778147	32,31386599	59,6443522	

Рисунок 2.12. Расчет ковариационной матрицы зависимостей акций YAKG, YKEN, RTKM, LKOH

Чтобы рассчитать общий риск портфеля нам необходимо приумножить доли весов акций между собой и значения ковариаций этих акций. Для примера установим доли акций по 0,25 и рассчитаем общий риск портфеля. Формулы расчета риска и доходности инвестиционного портфеля будут иметь следующий вид:

Общий рис инвестиционного портфеля =
 $\text{КОРЕНЬ}(\text{МУМНОЖ}(\text{МУМНОЖ}(F24:I24;F20:I23);D20:D23))$

Общая доходность инвестиционного портфеля = $F15 \cdot F24 + G15 \cdot G24 + H15 \cdot H24 + I14 \cdot I24$

18			Ковариационная матрица зависимостей акций				
19		Доля (w)		ЯТЭК	Якутскэнерго	Ростелеком	ЛУКОЙЛ
20		0,25	ЯТЭК	3889,446558	239,4140693	-18,152193	14,2458321
21		0,25	Якутскэнерго	239,4140693	121,8326462	45,42915125	13,1177815
22		0,25	Ростелеком	-18,152193	45,42915125	43,28092633	32,313866
23		0,25	ЛУКОЙЛ	14,24583206	13,11778147	32,31386599	59,6443522
24		Доля акций в портфеле (wT)		0,25	0,25	0,25	0,25
25							
26		Общий риск портфеля		17,26076023			
27		Общая доходность портфеля		7,097931306			

Рисунок 2.13. Расчет общей доходности и общего риска портфеля

Таким образом, при равных долях акций в портфеле общий риск портфеля будет 17,26%, а общая доходность – 7,1%.

Формирование инвестиционного портфеля минимального риска

Целевая функция будет представлена формулой общего риска портфеля, значение которого будет минимальным при определенном уровне доходности. Пусть минимально приемлемая доходность будет равна 3%.

Получаем следующую экономико-математическую задачу формирования оптимального портфеля акций минимального риска:

$$\begin{cases} \sqrt{3889,45x_1^2 + 121,83x_2^2 + 43,28x_3^2 + 59,64x_4^2} \rightarrow \min \\ 24,62x_1 + 2,67x_2 + 0,61x_3 + 0,49x_4 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 > 0 \end{cases}$$

При оценке долей акций воспользуемся надстройкой в Excel «Поиск решений». А сумма долей акций должна быть равна 1 и сами доли должны иметь положительный знак. Формула ограничения размера доли в портфеле будет иметь следующий вид:

Ограничение на сумму долей акций (F28) =СУММ(F24:I24)

18				Ковариационная матрица зависимостей акций			
19		Доля (w)		ЯТЭК	Якутскэнерго	Ростелеком	ЛУКОЙЛ
20		0,091863537	ЯТЭК	3889,446558	239,4140693	-18,152193	14,2458321
21		0,100305703	Якутскэнерго	239,4140693	121,8326462	45,4291513	13,1177815
22		0,612578122	Ростелеком	-18,15219295	45,42915125	43,2809263	32,313866
23		0,195252639	ЛУКОЙЛ	14,24583206	13,11778147	32,313866	59,6443522
24			Доля акций в портфеле (wT)	0,091863537	0,100305703	0,61257812	0,19525264
25							
26			Общий риск портфеля	8,322881641			
27			Общая доходность портфеля	3,000000012			
28			Ограничения долей	1			

Рисунок 2.14. Формирование инвестиционного портфеля Марковица в Excel. Расчет для минимального риска

В результате получим, что риск портфеля будет равен 8,3% и состоять он будет из 9% акций ПАО «ЯТЭК», 10% - ПАО «Якутскэнерго», 61% - ОАО «Ростелеком» и 20% - ОАО «ЛУКОЙЛ».

Формирование эффективного инвестиционного портфеля

Вторая задача, которая решается на основе модели Г. Марковица – построение портфеля с максимальным уровнем доходности и ограниченным уровнем риска. Разберем на примере

$$\sigma_p \leq 6,3\%$$

данную задачу. Установим максимально допустимый уровень риска портфеля

Получаем следующую экономико-математическую задачу формирования оптимального портфеля акций максимальной эффективности:

$$\begin{cases} 24,62x_1 + 2,67x_2 + 0,61x_3 + 0,49x_4 \rightarrow \max \\ 3889,45x_1^2 + 121,83x_2^2 + 43,28x_3^2 + 59,64x_4^2 \leq 6,3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 > 0 \end{cases}$$

С помощью надстройки «Поиск решений» определим доли акций в данной интерпретации задачи. На рисунке ниже показаны основные параметры для формирования портфеля с максимальной доходностью.

18				Ковариационная матрица зависимостей акций				
19			Доля (w)		ЯТЭК	Якутскэнерго	Ростелеком	ЛУКОЙЛ
20			0,017771581	ЯТЭК	3889,446558	239,4140693	-18,152193	14,2458321
21			0,017301757	Якутскэнерго	239,4140693	121,8326462	45,4291513	13,1177815
22			0,692057562	Ростелеком	-18,15219295	45,42915125	43,2809263	32,313866
23			0,272869101	ЛУКОЙЛ	14,24583206	13,11778147	32,313866	59,6443522
24			Доля акций в портфеле (wT)		0,017771581	0,017301757	0,69205756	0,2728691
25								
26			Общий риск портфеля		6,300000994			
27			Общая доходность портфеля		1,041420523			
28			Ограничения долей		1			

Рисунок 2.16. Формирование инвестиционного портфеля Марковица в Excel. Оценка для максимизации доходности акций

В результате формирования эффективного инвестиционного портфеля при минимальном приемлемом уровне риска равной 6,3% получили следующие результаты: оптимальный портфель максимальной доходности при заданном уровне риска будет состоять из 2% акций ПАО «ЯТЭК», 2% - ПАО «Якутскэнерго», 69% - ОАО «Ростелеком» и 27% - ОАО «ЛУКОЙЛ». А общая доходность портфеля будет равна 1,04%.

Таким образом, по теории Марковица можно сформировать портфель двумя способами: сформировать портфель либо минимального риска, либо максимальной доходности.

Список литературы:

1. Асаул А.Н., Севек В.К., Севек Р.М. Рынок ценных бумаг: учебник – Кызыл: ТывГУ, 2013. – 232 с.
2. Кретьова Н.В. Инвестиции : учеб. пособие / сост. Н.В. Кретьова, О.И. Мокрецова. – Иркутск : ИрГУПС, 2012. – 212 с.
3. Ахмедов Ф.Н. Формирование оптимального портфеля ценных бумаг. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-optimalnogo-portfelya-tsennyh-bumag/viewer>
4. <https://www.investing.com>