

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ СО СКАЧКАМИ

Михайлова Саяна Сергеевна

магистрант, Северо-Восточного федерального университета им М.К. Аммосова, института математики и информатики, РФ, Республика Саха (Якутия), г. Якутск

Аннотация. В данной статье рассматривается исследование моделей стохастической волатильности со скачками. В статье использована модель Блэка-Шоулза. В данной модели показана, что цена актива представляет собой геометрическое броуновское движение. С положительным сносом, эта модель гарантирует, что собственный капитал компании со временем будет расти.

Ключевые слова: волатильность со скачками, модель Блэка-Шоулза, модель Хестона, стохастические модели волатильности.

Моделирование и прогнозирование изменчивости различных показателей, например акций, цены на нефть, курсов валют на финансовых рынках в наше время является объектом исследований и теоретических работ. Все в мире меняется, цены не исключение, и предсказать их поведение становится все сложнее.

В статье использована модель Блэка-Шоулза. В данной модели показана, что цена актива представляет собой геометрическое броуновское движение. Расширение модели Блэка-Шоулза было введено Мертоном в 1973г. Он был обеспокоен очень быстрым изменением цен (скачками), которые были смоделированы с помощью сложного пуассоновского процесса. Однако этот подход не есть закрытое решение формы для вариантов.

Существует открытый вопрос о том, есть ли реальные скачки на рынке и обоснованность присоединения Пуассоновского процесса для их моделирования.

Дальнейшее изучение стохастических моделей позволило разработать стохастические модели процентных ставок. Первое крупное исследование было предложено Васичеком в 1977г. Процесс рассматривался как случайный процесс со средней реверсией, который основан на процессе Орнштейна-Уленбека.

Такой подход также популярен для валютных опционных моделей из-за характера поведения цены валюты. Слабость подхода в том, что эта модель может привести к отрицательным процентным ставкам. CIR процесс является процессом квадратного корня, который исключает возможность отрицательного значения для процентных ставок.

Все модели, которые обсуждались до сих пор, а именно модели Блэка-Шоулза и Мертона для установления цены, модель Васичека и CIR процесс для процентных ставок, предполагая, что волатильность не имеет отдельного источника неопределенности, кроме цены актива или собственной ставки. Эти модели называются моделями локальной волатильности (Локальная волатильность означает, что волатильность является функцией процесса и времени цены актива, т.е. его стоимость в данный момент времени полностью определяется стоимостью процесса ценообразования актива в данное время). Модель волатильности, такая как модель Васичека, является особым случаем.

Стохастическая модель – такая экономико-математическая модель, в которой параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами, либо исходная информация также представлена случайными величинами. Следовательно, характеристики состояния в модели определяются не однозначно, а через законы распределения их вероятностей.

Стохастическое моделирование факторных систем взаимосвязей отдельных сторон хозяйственной деятельности опирается на обобщение закономерностей варьирования значений экономических показателей – количественных характеристик факторов и результатов хозяйственной деятельности. Количественные параметры связи выявляются на основе сопоставления значений изучаемых показателей в совокупности хозяйственных объектов или периодов. Таким образом, первой предпосылкой стохастического моделирования является возможность составить совокупность наблюдений, т.е. возможность повторно измерить параметры одного и того же явления в различных условиях.

Модель Блэка-Шоулза была введена в 1973 году и имеет набор удачных допущений накладываемых на динамику актива. Результатом является аналитическая формула цены Европейских опционов. Формально, в соответствии с моделью ценовой процесс

актива S_t подчиняется геометрическому броуновскому движению:

$$dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

где W_t - стандартное Броуновское движение, m и σ фиксированные параметры. Применяя

лемму Ито получаем, что логарифм цены $Y_t = \log(S_t)$ имеет следующую динамику:

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Данное представление позволяет интерпретировать модель следующим образом: dY_t

изменение логарифмической цены актива, μdt детерминированный линейный снос

и σdW_t диффузионную составляющую с параметрами волатильности.

Эмпирические исследования показали, что волатильность обладает некоторыми стилизованными фактами такими как: «эффект рычага» (возврат к среднему), не отрицательность, а также временная структура. Исходя из этих особенностей исследователями для описания волатильности был рассмотрен процесс Орнштейна-Уленбека (процесс возврата к среднему), данный процесс также используется в описании краткосрочных ставок, например модель Васическа:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_t dW_t,$$

где κ - интенсивность возврата к среднему, θ - показатель стационарности процесса, σ_t - волатильность.

В качестве обобщения модели Блэка – Шоулза были введены модели стохастической волатильности, которые разрешают стилизованные факты и предоставляют некоторую свободу действий в работе. Широкую популярность получила модель Хестона, так как она имеет решение закрытого типа для цены Европейского колл опциона. В 1993 году Стивен Хестон предложил следующие формулы для описания движения цен на активы, где цена и

волатильность актива следует за броуновским движением:

$$dS_t = mS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1,$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^2$$

где S_t - цена актива в момент времени t , m - безрисковая процентная ставка, v_t - волатильность (стандартное отклонение) цены актива, W_t^1, W_t^2 - Броуновское движение ценовой дисперсии актива, κ - в модели выступает как скорость возврата к среднему значению θ , θ - показатель стационарности процесса, σ - волатильность волатильности v_t .

Модель Хестона является обобщенной моделью Блэка - Шоулза в которой волатильность ценового процесса изменяется с течением времени.

Важно отметить, что благодаря устройству процесса Орнштейна-Уленбека, волатильность цены стремится вернуться к своему среднему значению θ имеющую интерпретацию долгосрочной волатильности.

Модель Хестона является примером удачной модели, увеличение степени свободы позволило разрешить неточности модели Блэка-Шоулза. Но введение стохастической волатильности кажется недостаточным.

Одной из первых моделей включающих скачки, является модель Мертона:

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t + \xi^y dN_t^y$$

Где μ - частота возвращения актива, N_t - процесс Пуассона и ξ^y - случайная величина из нормального распределения.

Скачки в модели Мертона позволяет учитывать большие движения актива, однако, модель предполагает постоянство параметра σ на всем временном интервале и не учитывает кластеризацию волатильности. Данную модель обобщил Bates и скомбинировал стохастическую волатильность и скачки в доходности актива:

$$dY_t = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^1 + \xi^y dN_t^y$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^2$$

Данная модельная спецификация позволяет учитывать кластеризацию волатильности и большие движения рынка в виде скачков доходности актива. Однако, в работе Pan (2002) было обнаружено, что добавление скачков в доходность актива оказывается недостаточным. В действительности, наличие скачков в доходности помогает объяснить лишь локальные движения рынка.