НАУЧНЫЙ ФОРУМ nauchforum.ru

Научный журнал «Студенческий форум» выпуск №3(139)

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МАТРИЧНОЙ ИГРЕ ВИДА 2 Х 2

Сергеева Ольга Викторовна

студент, Воронежский Государственный Педагогический Университет, РФ, г. Воронеж

Сакалова Кристина Андреевна

студент, Воронежский Государственный Педагогический Университет, РФ, г. Воронеж

Матричная игра – это парная игра, которая задается набором чистых стратегий $\{1, \ldots, \mathrm{m}\}$ и $\{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ первого и второго игроков, а также платежной матрицей $(a_{ij})_{m*n}$, определяющей выигрыш первого игрока при выборе игроками стратегий i и j соответственно. Целью первого игрока является максимизация своего выигрыша, а целью второго – минимизация выигрыша противника.

Если седловая точка в платежной матрице отсутствует, то решения в чистых стратегиях *не существует.* В таких случаях ищут решение игры в смешанных стратегиях.

<u>Критерий существования равновесия в смешанных стратегиях матричной игры вида 2*2.</u>

У каждого из двух игроков есть ровно две чистые стратегии.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Для того чтобы матрица 2*2 имела равновесие в смешанных стратегиях необходимо и достаточно, чтобы одна из её диагоналей доминировала над другой, т.е. каждый элемент одной диагонали строго больше, чем каждый элемент другой диагонали.

$$a > b, a > c$$

$$d > b, d > c$$

либо

$$b > a, b > d$$

$$c > a, c > d$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть в матрице одна из диагоналей доминирует над другой. Покажем, что в ней нет равновесий только в смешанных стратегиях, т.е. седловой точки нет.

$$\begin{pmatrix} a^* & b^\wedge \\ c^\wedge & d^* \end{pmatrix}$$

$$a > b, a > c$$

$$d > b, d > c$$

Седловой точки нет.

Достаточность. Если в матрице нет седловой точки, то одна из диагоналей доминирует надо другой.

Пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ не имеет седловой точки.

Покажем, что одна из диагоналей доминирует над другой.

Если в матрице нет седловой точки, то в ней не может быть двух одинаковых элементов.

$$\begin{pmatrix} a^{*\wedge} & a^\wedge \\ c^\wedge & d \end{pmatrix}$$

Покажем, что в такой матрице есть седловая точка.

В матрице $\begin{pmatrix} a^* & b^\wedge \\ c^\wedge & d^* \end{pmatrix}$ седловой точки нет.

Выделим *min* элемент в 1-ой строке.

Значит, $a > b, d > c$

Анализируем столбцы: $a > c, d > b$

Главная диагональ доминирует над второй диагональю.

ч.т.д.

Вычисление равновесных смешанных стратегий для матрицы вида 2*2

Пусть дана матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

В данной матрице одна из диагоналей доминирует над другой => в данной матрице есть равновесие в смешанных стратегиях.

Рассмотрим две прямые:

$$\ell_1(x) = ax + c(1-x) = (a-c)x + c$$

$$\ell_2(x) = bx + d(1-x) = (b-d)x + d$$

max точка этого семейства будет точка пересечения этих двух прямых.

$$(a-c)x + c = (b-d)x + d$$

$$(a-c-b+d)x = d-c$$

$$x = \frac{d-c}{a-c-b+d}$$

$$1-x = \frac{a-c-b+d-d+c}{a-c-b+d} = \frac{a-b}{a-c-b+d}$$

Равновесная стратегия для первого игрока.

$$\lambda(a-c) + (1-\lambda)(b-d) = 0$$

$$\lambda(a+d-b-c) + b - d = 0$$

$$\lambda = \frac{d-b}{a+d-b-c}$$

$$1-\lambda = \frac{a+d-b-c-d+b}{a+d-b-c} = \frac{a-c}{a+d-b-c}$$

$$U = (a-c)\frac{d-c}{a+d-b-c} + c =$$

$$= \frac{ad - ac - cd + c^2 + ac + cd - bc - c^2}{a + d - b - c} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{a + d - b - c} \quad - \quad \text{цена игры}$$

Список литературы:

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. - М.: Мир, 1985.

2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005.