ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

Гоменюк Екатерина Александровна

студент, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, РФ, г. Белгород

Теория групп начала оформляться в качестве самостоятельного раздела математики в конце восемнадцатого века. Многие работы по теории групп посвящены исследованию класса групп, называемых группами подстановок (или группами перестановок). Группы подстановок особенно интересны тем, что с их помощью можно получить конкретные представления всех конечных групп.

Множество взаимно однозначных отображений множества из n элементов на себя составляет группу отображений. Отображение — это записанные в виде двух строк, заключенных в скобки, где элементы из области определения стоят в верхней строке, а элементы из области значений — в нижней. Такие отображения называют подстановками, а группы, элементами которых являются подстановки - группами подстановок [3].

Решение задач по теме «Группы подстановок»

1) Составить таблицу умножения в группе S_3; Каков порядок группы $< S_3, * >$;

2) Найдите порядок каждого элемента этой группы?

3) Какие подгруппы есть в данной группе

4) Разложите эту группу по подгруппе четных подстановок.

Решения:

1) Пусть S_3 – группа всех подстановок третьей степени, т.е.

$$S_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\},$$

где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя попарные произведения этих элементов, получаем для данной группы следующую таблицу:

Таблица 1.

Попарные произведения

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_2	s_2	s_1	s_4	s_3	s_6	s_5
s_3	s_3	s_5	s_1	s_6	s_2	s_4
s_4	s_4	s_6	s_2	s_5	s_1	s_3
s_5	s_5	s_3	s_6	s_1	s_4	s_2
s_6	s_6	s_4	s_5	s_2	s_3	s_1

Так как в группе 6 элементов, то порядок S_3 равен **6.**

2) n – порядок элемента $a \in S$, если $a^n = 1$ и n – наименьшее число, для которого это выполняется [1].

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

Следовательно $s_1 = e$, значит, порядок $s_1 = 1$,

$s_2^2 = e$, значит, порядок $s_2 = 2$,

$s_3^2 = e$, значит порядок $s_3 = 2$,

$s_4^3 = e$, значит, порядок $s_4 = 3$,

$s_5^3 = e$, значит, порядок $s_5 = 3$,

$s_6^2 = e$, значит, порядок $s_6 = 2$.

3)Множество $H_1 = \{s_1, s_6\}$ является подгруппой группы S_3 .

4) Составим правый и левый смежные классы элемента s_6 по подгруппе H_1:

$H_1 s_6 = \{s_1 s_6, s_3 s_6\} = \{s_6, s_4\}$,

$s_6 H_1 = \{s_6 s_1, s_6 s_3\} = \{s_6, s_5\}$.

Таким образом левый и правый классы элемента s_6 не совпадают. Составляя теперь правые смежные классы всех элементов группы S_3 получим:

$H_1 s_1 = \{s_1, s_3\}$, $H_1 s_2 = \{s_2, s_5\}$, $H_1 s_3 = \{s_3, s_1\}$

$H_1 s_4 = \{s_4, s_6\}$, $H_1 s_5 = \{s_5, s_2\}$, $H_1 s_6 = \{s_6, s_4\}$.

Отсюда очевидно, что различных правых смежных классов оказалось только три:

$\{s_1, s_3\}$, $\{s_2, s_5\}$, $\{s_4, s_6\}$

поскольку классы некоторых различных элементов, например s_4 и s_6, совпадают (эти элементы входят в один и тот же класс).

Группа S_3 имеет следующую нормальную подгруппу H_2: $\{s_1, s_5, s_4\}$. Это подгруппа четных подстановок [2].

Вычисления, аналогичные вычислениям примера 1, показывают, что найдутся только два различных правых класса:

$\{s_1, s_5, s_4\}$ и $\{s_2, s_3, s_6\}$.

Правый из них является правым смежным классом для каждого из элементов подгруппы H_2, второй – для всякого другого элемента группы S_3 .

Список литературы:

1. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: учеб. для Вузов / А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2001. – 318 с

2. Кофман А., Фор Р. Современная математика. Пер. с франц. — В.П. Мякишева и В.Е. Тараканова. / Б.Л. Севастьянова. –М.: Наука, 1975. —271 с.

3. Постников, М.М. Теория Галуа. / М.М. Постников. — М.: Изд-во Физ-мат. литературы, 1963. - 220 с.